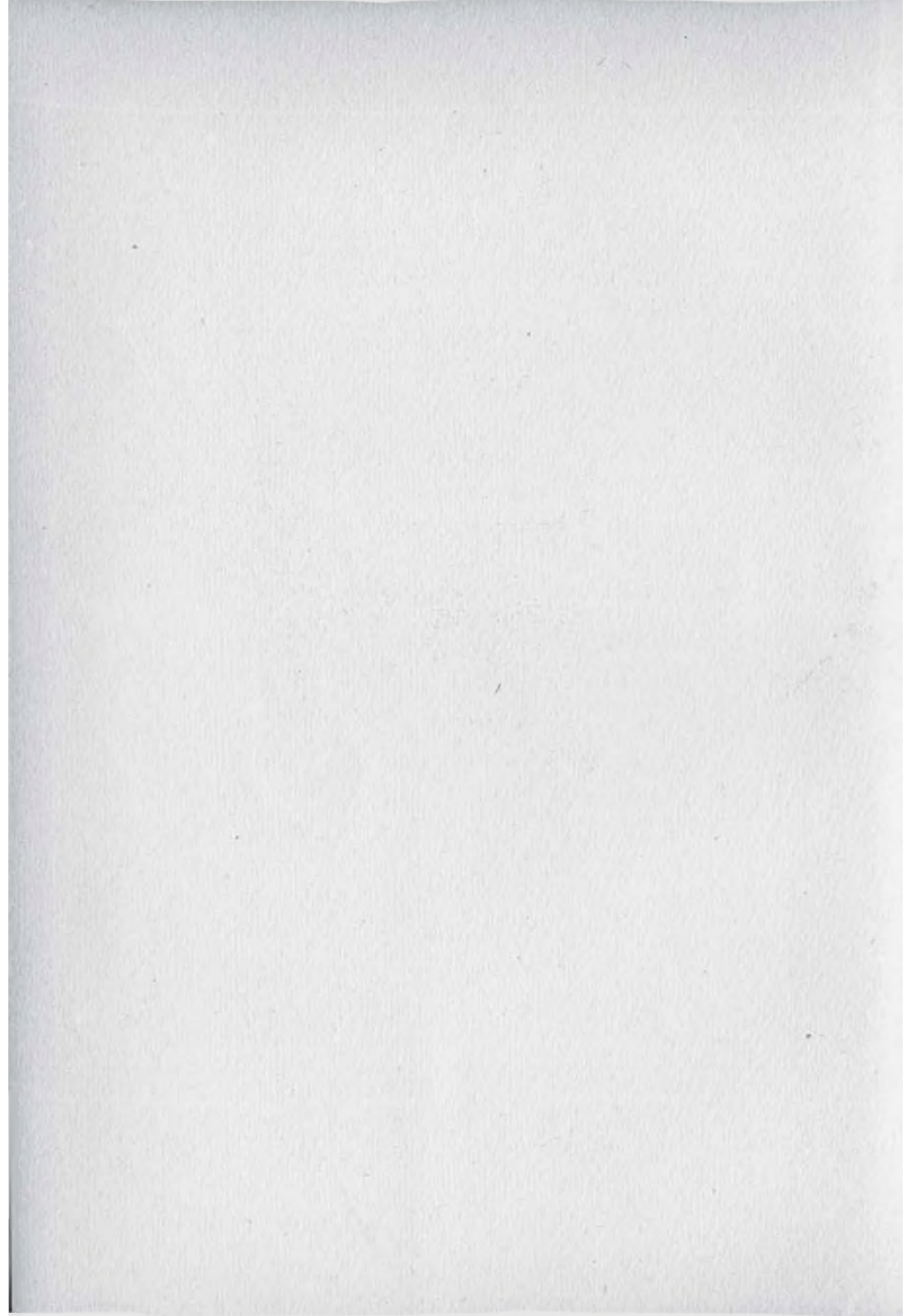


RIVISTA MILITARE



FASCICOLO TECNICO ARTIGLIERIA

MINISTERO DELLA DIFESA-ESERCITO
DIREZIONE E AMMINISTRAZIONE: ROMA, VIA DI S. MARCO 8



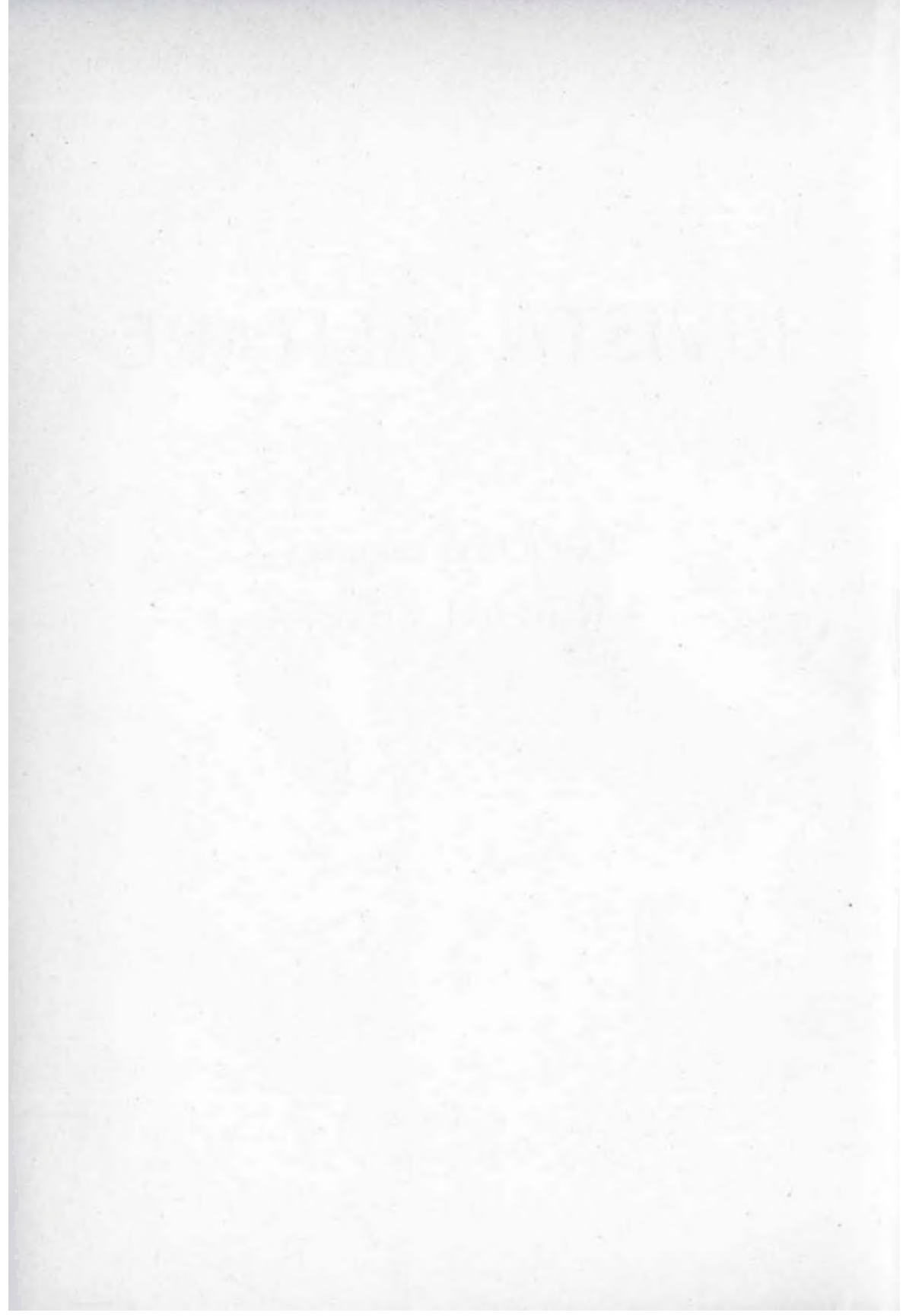
ANNO VII

LUGLIO 1951

RIVISTA MILITARE

FASCICOLO TECNICO
ARTIGLIERIA

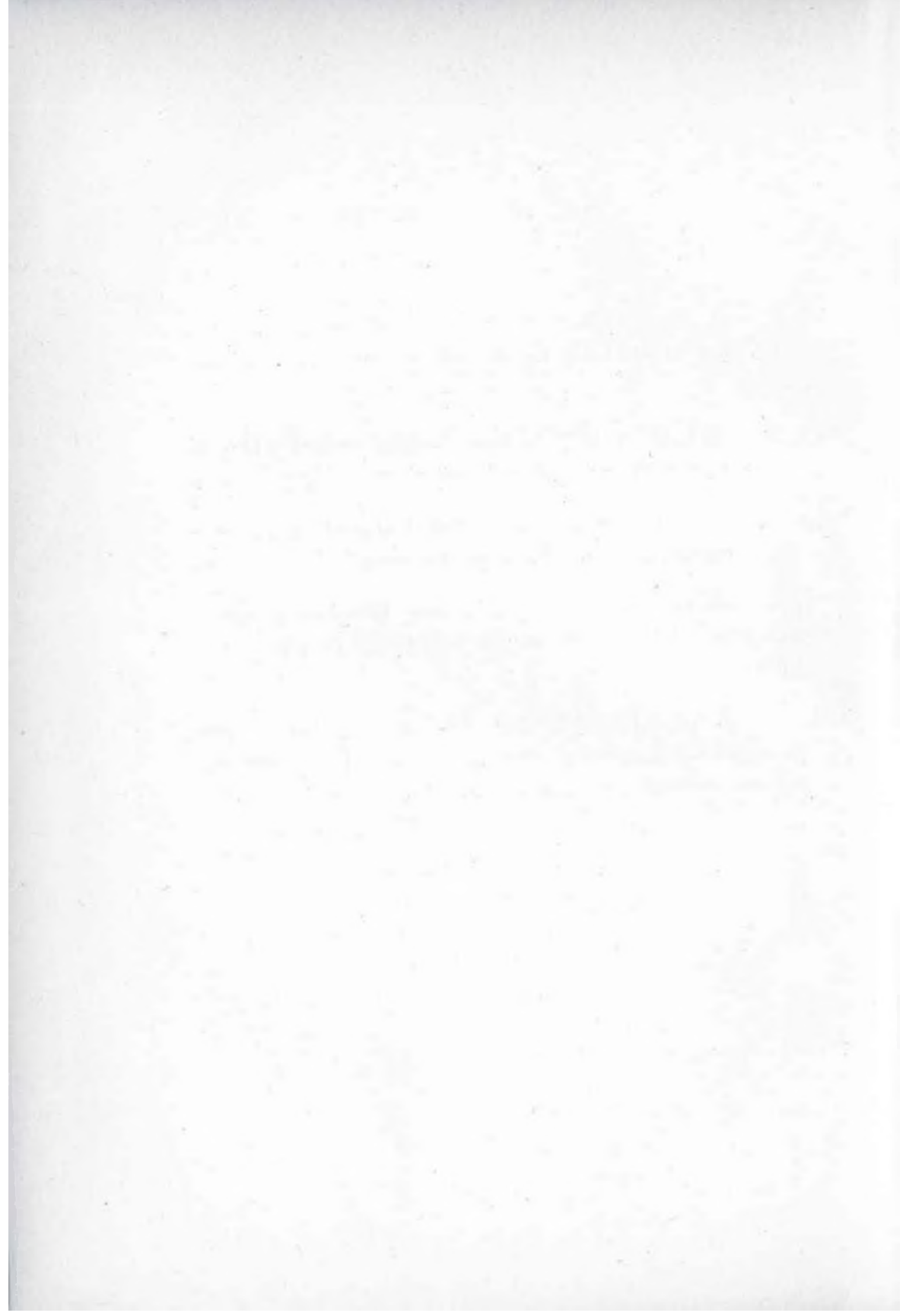
R O M A
VIA DI S. MARCO, 8



S O M M A R I O

Pagina

Col. d'art. (S. Te. A.) FRANCESCO GALANZINO e Cap. d'art. (ris.) MARIO ASTUTI: Calcolo delle traiettorie per archi successivi	5
Prof. Ing. CARLO JACHINO: Linee di egual velocità e linee di egual inclinazione nel moto dei proietti	13
Cap. d'art. OSCAR MARTINELLI: Nuovi orientamenti circa la determinazione dei dati di tiro del momento	21
Prof. Ing. GIOVAN BATTISTA PACELLA: Balistica e geodesia - Teleproietto (punto-massa) soggetto alla gravità del campo ellissoidico terrestre	47
Col. d'art. (S. Te. A.) GIOVENALE ARGAN: Impiego delle formule generali di balistica interna per la soluzione del problema balistico principale in alcuni casi particolari	95



CALCOLO DELLE TRAIETTORIE PER ARCHI SUCCESSIVI

Col. d'art. (S.Te.A.) Francesco Galanzino e Cap. d'art. (ris.) Mario Astuti

Quando la funzione resistente $F(v)$ viene rappresentata con una espressione esponenziale monomia del tipo:

$$[1] \quad F(v) = \lambda v^n \dots$$

si incontrano notevoli difficoltà nell'integrare l'equazione dell'odografa perchè non è possibile trovare un campo di variabilità della velocità nel quale l'esponente n di cui alla [1] si mantenga costante. E' appunto per tale motivo che la traiettoria viene suddivisa in archi, la cui ampiezza deve essere tale che il grado di resistenza n rimanga sensibilmente costante.

Come è noto il valore del grado di resistenza n si deduce derivando la [1] e cioè ricavando:

$$[1'] \quad F'(v) = n \lambda v^{n-1} \dots$$

per cui dividendo la [1] per la [1'] si deduce:

$$n = \frac{v F'(v)}{F(v)}$$

Costruendo un diagramma fra n e v (vedi figura), si nota che la n si mantiene costante per velocità inferiori ai 240 m/s; siamo nel campo della resistenza quadratica, e cioè nel caso in cui un mobile, che si muove in aria, incontra una resistenza proporzionale al quadrato della sua velocità di traslazione. Dopo $V = 240$ m/s il grado della resistenza n cresce rapidamente fino al valore di $n = 5,9$ per $V = \sim 300$ m/s indi decresce per diventare assintotico ad $n = 1$ per le alte velocità.

Dall'esame del diagramma $V = n(v)$ appare chiaramente che non è possibile attribuire un valore costante ad n per un'intera traiettoria.

Vi sono però traiettorie speciali per le quali, se non è possibile considerare tale quantità costante per tutto il tratto compreso fra origine e punto di caduta, lo è almeno per una buona parte di esso. Rientrano in questo caso particolare due tipi di traiettorie: quelle descritte dai proiettili da bocche di fuoco anticarro lanciati con piccoli angoli di proiezione e con fortissime velocità iniziali, e quelle delle bocche da fuoco contraerei che, com'è noto,

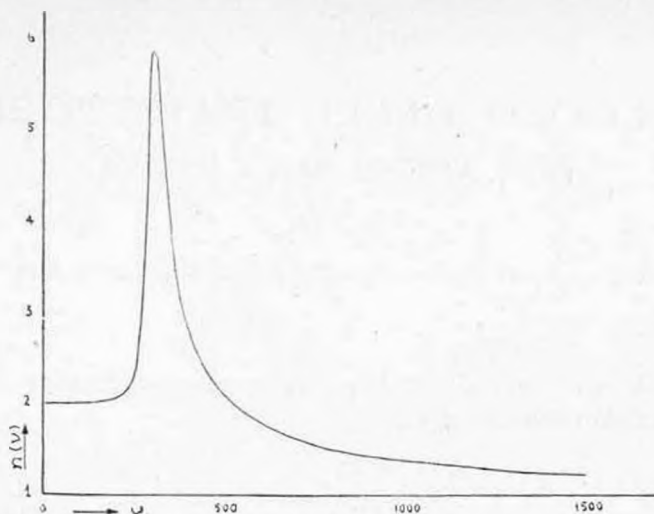


Fig. 1.

impiegano, per lo speciale tipo di tiro che eseguono, solo il primo tratto della traiettoria, compreso fra origine e vertice, e che in massima parte è descritto con velocità molto rilevanti.

In ambedue i casi è possibile adottare per la funzione resistente, la forma monomia lineare, e considerare cioè la $F(V)$ proporzionale alla prima potenza della velocità.

La traiettoria però non verrà calcolata in un arco solo, ma sarà spezzata in tanti archetti di ampiezza più o meno grandi a seconda dell'approssimazione che si desidera ottenere nel calcolo.

L'ampiezza di tali archi può essere determinato seguendo vari procedimenti.

I metodi di calcolo impiegati nell'artiglieria italiana e quelli di molti eserciti esteri, scelgono come variabile indipendente, per fissare l'ampiezza dell'arco, l'inclinazione alla fine di esso, e vari di questi provvedimenti ricorrono all'impiego di tabelle preventivamente calcolate.

Il procedimento che verrà esposto fissa l'ampiezza dell'arco in base al tempo t necessario al proietto per percorrerlo e non richiede l'impiego di tavole precalcolate.

Inoltre il nuovo procedimento non costringe il calcolatore ad eseguire lunghe e faticose interpolazioni, semplici o doppie, come avviene per numerosi altri metodi di calcolo.

I risultati forniti dal sistema che viene esposto sono, evidentemente, funzione dell'ampiezza dell'arco che si considera, e se tale ampiezza viene fissata in $1''$ si ottengono dati praticamente uguali a quelli degli altri metodi di calcolo comunemente impiegati.

Il problema da risolvere è il seguente:

Dati $V, \varphi, i/C$ e prefissato t all'estremo dell'arco, calcolare x, y, v, θ nel caso in cui $F(v) = \lambda v$.

Dalle equazioni del moto scritte sotto la forma del Saint-Robert

$$\begin{cases} g \, d(v \cos \theta) = v \, f(v) \, d\theta \\ g \, dx = -v^2 \, d\vartheta \\ g \, dy = -v^2 \, \tan \vartheta \, d\vartheta \\ g \, dt = -v \, \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} \\ g \, ds = -v^2 \, \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} \end{cases}$$

dividendo membro a membro la 1^a equazione per la 4^a si ha

$$[2] \quad \frac{d(v \cos \theta)}{dt} = -f(v) \cos \theta$$

Nella $f(v) = \frac{\partial y}{\partial v} \frac{i}{c} F(v)$ poniamo $F(v) = \lambda v$, cioè sostituiamo alla curva $F(v)$ una retta passante per l'origine e di coefficiente angolare λ . (V. figura).

$$f(v) = \frac{\partial y}{\partial v} \frac{i \lambda}{c} v$$

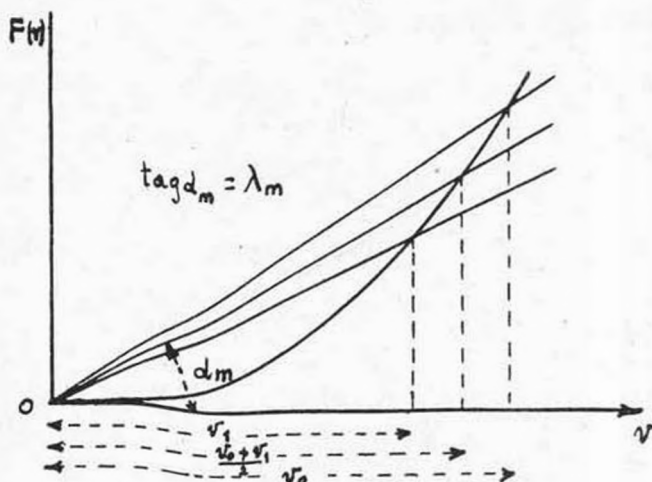


Fig. 2.

Sostituendo nella [2]

$$[3] \quad \frac{d(v \cos \theta)}{dt} = -\frac{\partial y}{\partial v} \frac{i \lambda}{c} v \cos \theta$$

Poniamo $v \cos \theta = u$ e $\frac{\partial y}{\partial v} \frac{i \lambda}{c} = \gamma$. Sostituendo in [3] e separando le variabili si ha:

$$\frac{du}{u} = -\gamma \, dt$$

Integriamo tra l'origine e l'estremo dell'arco e indichiamo con γ_m un valore medio di γ nell'intervallo d'integrazione

$$[4] \quad u = u_0 e^{-\gamma_m t}$$

oppure

$$[5] \quad \log_{10} u = \log_{10} u_0 - \gamma_m t^M$$

essendo $M = 0,43429$ il modulo dei logaritmi decimali.

Calcolo di x .

Dalla $\frac{dx}{dt} = v \cos \theta = u$ (velocità orizzontale) si ha

$$dx = u dt$$

Integrando e prendendo per u la media geometrica $\sqrt{u_0 u}$

$$[6] \quad x = t \sqrt{u_0 u}$$

Calcolo di y .

Dalla $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$ si ha $dy = \tan \theta dx$.

Integrando

$$y = (\tan \theta)_m dx$$

e ponendo

$$(\tan \theta)_m = \frac{\tan \varphi + \tan \theta}{2}$$

[7]

$$y = \frac{x}{2} (\tan \varphi + \tan \theta)$$

Calcolo di θ .

Dalla $g dt = -v \frac{d\theta}{\cos \theta}$ si ha ricordando che $v = \frac{u}{\cos \theta}$

$$g dt = -u \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -u d \tan \theta$$

Integriamo tra l'origine e l'estremo dell'arco e consideriamo ancora $u_m = \sqrt{u_0 u}$ si ha

$$g \int_0^t dt = u_m \int_{\theta}^{\theta_0} d \tan \theta$$

$$g t = \sqrt{u_0 u} (\tan \varphi - \tan \theta)$$

da cui

$$[8] \quad \tan \theta = \tan \varphi - \frac{g t}{\sqrt{u_0 u}}$$

All'inizio del calcolo non conosciamo z_y e λ ; allora si calcola un primo valore di $\gamma = \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{i \lambda}{c}$ in funzione di y_0 e v_0 .

Con questo valore di γ_0 si calcolano u_a con la [5], θ_a con la [8], y_a con la [7], x_a con la [6] e quindi $v_a = \frac{u_a}{\cos \theta_a}$.

In funzione di $\frac{v_0 + v_a}{2}$ si ha λ_m il quale rappresenta il coefficiente angolare della retta che congiunge l'origine della curva col punto della stessa curva che ha per ascissa $\frac{v_0 + v_a}{2}$. In funzione di $y_0 + \frac{y_a}{2}$ si ottiene z_m .

Noti z_m e λ_m si calcola γ_m .

Ottenuto γ_m , ripetendo il calcolo con le formule [6], [7] e [8], si hanno rispettivamente i valori definitivi di x , y , θ .

Ma per non stare a ripetere i calcoli con le stesse formule si possono correggere i valori ottenuti in prima approssimazione, in questa maniera:

Differenziamo logicamente la [4]

$$[9] \quad z \log u = \frac{\Delta u}{u} = - M t \Delta \gamma$$

essendo $\Delta \gamma$ la differenza tra i valori di γ in prima e seconda approssimazione.

Dalla [6] si ha differenziando

$$[10] \quad z \log x = -\frac{1}{2} z \log u$$

Dalla [8] si ha

$$\text{tag } \varphi - \text{tag } \theta = \frac{g t}{\sqrt{u_0 u}}$$

e differenziando

$$[11] \quad \frac{\Delta \text{tag } \theta}{\text{tag } \varphi - \text{tag } \theta} = \frac{1}{2} z \log u$$

Dalla

$$u = v \cos \theta$$

differenziando logicamente si ottiene

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta v}{v} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d \theta$$

Dalla $\Delta \text{tag } \theta = \frac{\Delta \theta}{\cos^2 \theta}$ si ha $\Delta \theta = \Delta \text{tag } \theta \cdot \cos^2 \theta$

e sostituendo $\frac{\Delta u}{u} = \frac{\Delta v}{v} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos^2 \theta \Delta \text{tag } \theta = \frac{\Delta v}{v} - \sin \theta \cos \theta \cdot \Delta \text{tag } \theta$

ossia $z \log v = z \log u + \sin \theta \cos \theta \cdot \Delta \text{tag } \theta$

Dalla [7] si ha differenziando

$$z \log y = z \log x + \frac{\Delta \text{tag } \theta}{\text{tag } \varphi + \text{tag } \theta}$$

e sostituendo a $\partial \log x$ e $\Delta \text{tag } \theta$ i valori forniti da [10] e [11] si ottiene

$$\partial \log y = \frac{1}{2} \partial \log u + \frac{1}{2} \frac{\text{tag } \varphi - \text{tag } \theta}{\text{tag } \varphi + \text{tag } \theta} \partial \log u$$

cioè

$$\partial \log y = \frac{1}{2} \partial \log u \left[1 + \frac{\text{tag } \varphi - \text{tag } \theta}{\text{tag } \varphi + \text{tag } \theta} \right]$$

RIEPILOGO DEI CALCOLI NEL CASO $t = 1''$.

1^a approssimazione.

$$\begin{aligned} v_0 &\longrightarrow \lambda_0 & y_0 &\longrightarrow \partial_0 \\ \gamma_0 &= \frac{\partial_0 i \lambda_0}{c} & \log_{10} u_a &= \log_{10} u_0 - \gamma_0 M \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_a &= \sqrt{u_0 u_a} \\ \text{tag } \theta_a &= \text{tag } \varphi - \frac{g}{\sqrt{u_0 u_a}} \\ y_a &= \frac{x_a}{2} (\text{tag } \varphi + \text{tag } \theta_a) \\ v_a &= \frac{u_a}{\cos \theta_a} \end{aligned} \right.$$

2^a approssimazione.

$$\left\{ \begin{aligned} \partial \log u &= -M \Delta \gamma \\ \partial \log x &= \frac{1}{2} \partial \log u \\ \partial \log y &= \frac{1}{2} \partial \log u \left[1 + \frac{\text{tag } \varphi - \text{tag } \theta_a}{\text{tag } \varphi + \text{tag } \theta_a} \right] \\ \Delta \text{tag } \theta &= \frac{1}{2} \partial \log u (\text{tag } \varphi - \text{tag } \theta_a) \\ \partial \log v &= \partial \log u + \text{sen } \theta \cdot \cos \theta \cdot \Delta \text{tag } \theta \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \log x &= \log x_a + \partial \log x \\ \log y &= \log y_a + \partial \log y \\ \log v &= \log v_a + \partial \log v \\ \text{tag } \theta &= \text{tag } \theta_a + \Delta \text{tag } \theta \end{aligned} \right.$$

Il procedimento di calcolo che è stato esposto non deve essere utilizzato per tutte le traiettorie, ma serve solo, come è stato detto, per quelle descritte con forti velocità.

In questi casi il metodo è rapido, semplice ed abbastanza preciso.

Per facilitare l'esecuzione materiale del calcolo viene riportata una tavola contenente i valori della funzione $\lambda = \frac{F(v)}{v}$ per valori della velocità variabili da 0 a 1500 m.

VALORI DELLA FUNZIONE $\lambda = \frac{F(\nu)}{\nu}$

ν	λ	ν	λ	ν	λ
10	0,0012	510	0,1779	1010	0,2699
20	0,0025	20	0,1814	20	0,2708
30	0,0038	30	0,1848	30	0,2717
40	0,0051	40	5,1881	40	0,2726
50	0,0064	50	0,1913	50	0,2735
60	0,0076	60	0,1944	60	0,2744
70	0,0087	70	0,1973	70	0,2753
80	0,0098	80	0,2001	80	0,2761
90	0,0110	90	0,2028	90	0,2769
100	0,0121	600	0,2054	1100	0,2778
10	0,0132	10	0,2080	10	0,2786
20	0,0142	20	0,2105	20	0,2793
30	0,0153	30	0,2129	30	0,2800
40	0,0164	40	0,2153	40	0,2807
50	0,0176	50	0,2176	50	0,2815
60	0,0188	60	0,2198	60	0,2823
70	0,0201	70	0,2219	70	0,2830
80	0,0215	80	0,2240	80	0,2837
90	0,0230	90	0,2260	90	0,2844
200	0,0246	700	0,2280	1200	0,2850
10	0,0261	10	0,2299	10	0,2857
20	0,0277	20	0,2318	20	0,2863
30	0,0295	30	0,2336	30	0,2869
40	0,0314	40	0,2354	40	0,2875
50	0,0336	50	6,2371	50	0,2881
60	0,0360	60	0,2388	60	0,2887
70	5,0388	70	0,2404	70	0,2893
80	0,0421	80	0,2420	80	0,2899
90	0,0462	90	0,2435	90	0,2906
300	0,0515	800	0,2451	1300	0,2912
10	0,0598	10	0,2465	10	0,2917
20	0,0696	20	0,2479	20	0,2922
30	0,0787	30	0,2493	30	0,2927
40	0,0872	40	0,2507	40	0,2932
50	0,0952	50	0,2521	50	0,2937
60	0,1028	60	0,2534	60	0,2942
70	0,1100	70	6,2547	70	0,2948
80	0,1170	80	0,2560	80	0,2953
90	0,1232	90	0,2572	90	0,2958
400	0,1288	900	0,2584	1400	0,2963
10	0,1343	10	0,2596	10	0,2968
20	0,1400	20	0,2607	20	0,2973
30	0,1449	30	0,2618	30	0,2978
40	0,1495	40	0,2629	40	0,2983
50	0,1539	50	0,2640	50	0,2987
60	0,1582	60	0,2650	60	0,2992
70	0,1624	70	0,2660	70	0,2997
80	0,1665	80	0,2670	80	0,3001
90	0,1704	90	0,2680	90	0,3006
500	0,1742	1000	0,2690	1500	0,3010

ESEMPIO - Dati: $\varphi = 45^\circ$, $v = 710 \text{ m/s}$, $i/c = 0,4388$, $\vartheta_0 = 1$, $h_0 = 300 \text{ m}$, $t = 1''$

calcolare x , y , v , θ all'estremo dell'arco.

Calcoli approssimati

$\log i/c$	1,64227
$\log \vartheta_0$	—
$\log \lambda_0$	1,36165
$\log \gamma_0$	1,00392
$\log M$	1,63778
$\log M\gamma_0$	2,64170
$\log v_0$	2,85126
$\log \cos \varphi$	1,84949
$\log u_0$	2,70075
$M\gamma_0$	0,04382
$\log u_a = \log u_0 - M\gamma_0$	2,65693
$\log u_0$	2,70075
$\log u_0 u_a$	5,35768
$\log x_a = \frac{1}{2} \log u_0 u_a$	2,67884
x_a	477,4
$\log g$	0,99167
$\text{colog } \sqrt{u_0 u_a}$	3,32116
$\log g / \sqrt{u_0 u_a}$	2,31283
$\text{tag } \varphi$	1,—
$g / \sqrt{u_0 u_a}$	0,02055
$\text{tg } \theta_a$	0,97945
θ_a	$44^\circ 24'$
$\text{tag } \varphi$	1,—
$\text{lag } \theta_a$	0,97945
$\text{tag } \varphi + \text{tag } \theta_a$	1,97945
$\text{tag } \varphi - \text{tag } \theta_a$	0,02055
$\log (\text{tag } \varphi + \text{tag } \theta_a)$	0,29656
$\log x_a$	2,67884
$\text{colog } 2$	1,69897
$\log y_a$	2,67437
y_a	472,5
$y_0 + \frac{y_a}{2}$	536,3
ϑ_m (Tabella)	0,974
$\log u_a$	2,65693
$\text{colog } \cos \theta_a$	0,14601
$\log v_a$	2,80294
v_a	635,3
$\frac{v_0 + v_a}{2}$	673
λ_m (Tabella)	0,2222

Calcolo delle correzioni

$\log i/c$	1,64227
$\log \vartheta_m$	1,98856
$\log \lambda_m$	1,34668
$\log \gamma_m$	2,97751
γ_m	0,09495
γ_0	0,10091
$\Delta\gamma = \gamma_m - \gamma_0$	-0,00596
$\log \Delta\gamma$	3,77525 _n
$\log M$	1,63778
$\log M\Delta\gamma$	3,41303 _n
$\Delta \log u = -M\Delta\gamma$	0,00259
$\vartheta \log x = \frac{1}{2} \vartheta \log u$	0,00129
$\log \left[1 + \frac{\text{tag } \varphi - \text{tag } \theta_a}{\text{tag } \varphi + \text{tag } \theta_a} \right]$	0,00449
$\log \frac{1}{2} \vartheta \log u$	3,11059
$\log \vartheta \cdot \log y$	3,11508
$\vartheta \log y$	0,00130
$\log (\text{tag } \varphi - \text{tag } \theta_a)$	2,31281
$\log \frac{1}{2} \vartheta \log u$	3,11059
$\log \Delta \text{tag } \theta$	5,42340
$\Delta \text{tag } \theta$	0,00003
$\log \Delta \text{tag } \theta$	5,42340
$\log \text{sen } \theta_a$	1,84489
$\log \cos \theta_a$	1,85399
$\log \text{sen } \theta_a \cos \theta_a \Delta \text{tag } \theta$	5,12228
$\text{sen } \theta_a \cos \theta_a \Delta \text{tag } \theta$	0,00001
$\vartheta \log u$	0,00259
$\vartheta \log v$	0,00260

Calcoli definitivi

$\log x_a$	2,67884
$\vartheta \log x$	0,00129
$\log x$	2,68013
x	478,8
$\log y_a$	2,67437
$\vartheta \log y$	0,00830
$\log y$	2,67567
y	473,9
$\log v_a$	2,80294
$\vartheta \log v$	0,00260
$\log v$	2,80554
v	639,1
$\text{tag } \theta_a$	0,97945
$\Delta \text{tag } \theta$	0,00003
$\text{tag } \theta$	0,97948
θ	$44^\circ 24'$

LINEE DI EGUAL VELOCITA' E LINEE DI EGUAL INCLINAZIONE NEL MOTO DEI PROIETTI

Prof. Ing. Carlo Jachino

PREMESSE.

Poichè nel moto balistico l'accelerazione g di gravità e la ritardazione $f(v)$ dovuta al mezzo modificano grandezza e inclinazione alla velocità iniziale impressa al proietto, risulta evidente l'utilità di completare la tavola di tiro con il fascio di odografe corrispondenti al fascio di traiettorie per attribuire ad ogni punto scelto sulla traiettoria la velocità che gli compete. Ricordiamo infatti che la curva odografa del moto descritto dal proietto sul piano di tiro illustra graficamente le condizioni di moto durante il tragitto, in quanto essa è riferita al sistema polare che coordina grandezza e inclinazione della velocità assunta dal proietto lungo la traiettoria (1).

La relazione stabilita fra traiettoria e sua odografa fa corrispondere al punto $P(x, y)$ scelto sulla traiettoria (fig. 1) il punto $P'(\nu, \theta)$ individuato sull'odografa dal raggio rettore $O'P'$ che ne misura la velocità ν , inclinata dell'angolo θ sull'asse polare $O'X'$ disposto orizzontalmente. Inversamente, condotta la tangente alla traiettoria parallela al raggio $O'P'$ intersecante l'odografa in P' risulta individuato (nel punto di contatto) il punto corrispondente P , in cui il proietto assume la velocità $\nu = O'P'$. Tale corrispondenza fra traiettoria e sua odografa è giustificata dal tempo t che compete ad entrambi i punti P e P' vincolati alla legge che regola il moto del proietto, e, pertanto, nel caso in cui la tavola di tiro sia provvista delle linee di egual tempo (contati a partire dall'istante zero all'origine della traiettoria) risulterà immediata la corrispondenza fra traiettoria e sua odografa.

Le proprietà che distinguono le curve odografe suggeriscono un metodo grafico per tracciare, sulla tavola di tiro, le linee di egual velocità e le linee di egual inclinazione, entrambe utili nella soluzione dei problemi del tiro riguardanti la velocità di arrivo sul segno e l'angolo di impatto. La presente memoria illustra appunto questo metodo grafico che si dimostra particolarmente utile nella costruzione delle linee di egual velocità.

(1) Nell'articolo *Traiettoria e odografa balistica*, comparso sulla « Rivista d'Artiglieria e Genio » dell'aprile 1937, sono raccolte e illustrate le proprietà del moto odografo.

MOTO NELL'ATMOSFERA.

Si consideri il fascio di traiettorie (fig. 2) che riproduce parte della tavola di tiro grafica relativa al proietto da 90 mm. lanciato con velocità iniziale $V = 710$ m/sec. sotto gli angoli di proiezione compresi fra 15° e 45° , e si coordinino in sistema polare (polo O') i valori assunti nel tragitto dalla velocità v

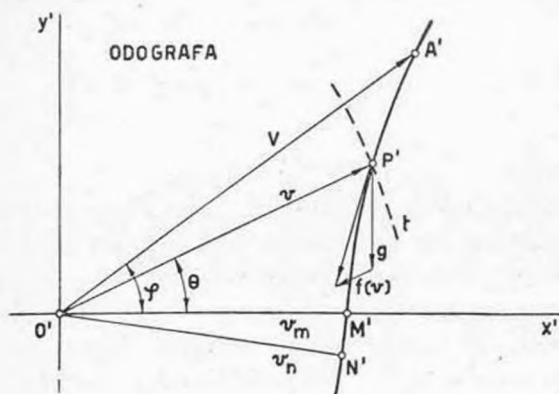
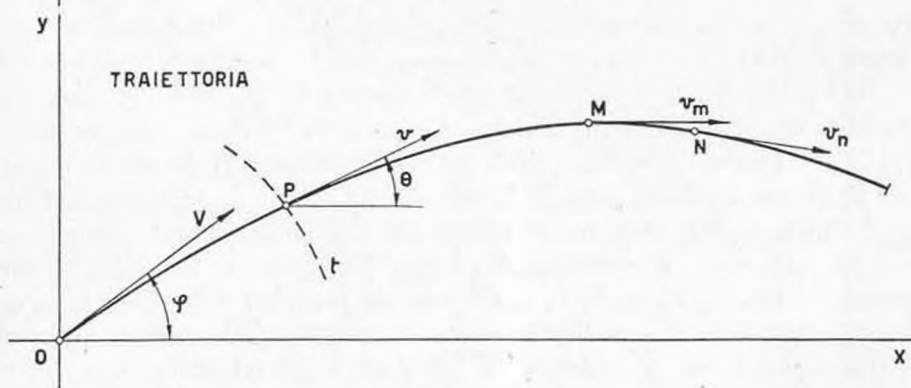


FIG. 1



e dall'inclinazione θ : si descrivano quindi le odografe corrispondenti alle traiettorie considerate, aventi origine nei punti $A_1, A_2, \dots, A_7$, disposti su di un arco di cerchio di raggio V (centro in O'), e aventi termine nei punti $U_1, U_2, \dots, U_7$ corrispondenti ai punti di caduta sull'orizzonte.

Le curve odografe dimostrano un sensibile andamento decrescente dovuto alla intensa ritardazione tangenziale esercitata dall'atmosfera sulle velo-

cità supersoniche; esse intersecano l'asse polare $O'X'$ nei punti M' corrispondenti al vertice delle traiettorie e raggiungono il massimo avvicinamento al polo O' quando il raggio vettore si presenta normale alla tangente sul punto N' di minima velocità.

Con centro nel polo O' si tracci il cerchio di raggio $v = 350$ m/sec. che interseca il fascio delle odografe sui punti P'_1 , ciascuno distinto dall'inclinazione θ competente alla tangente alla traiettoria nei corrispondenti punti P_1 ; i quali, congiunti con linea continua, individuano sul fascio delle traiettorie la linea di equal velocità ($v = 350$ m/sec.).

Poichè l'individuazione dei punti di contatto fra tangenti e traiettoria risulta imprecisa, conviene tracciare la linea di equal velocità corrispondente al prescelto arco di cerchio di raggio v , tramite le curve di equal tempo segnate su entrambi i fasci di curve (1). Questo procedimento, che impiega la relazione parametrica nel tempo t , permette di stabilire l'immediata corrispondenza fra i punti $P'_1(t)$, disposti sull'arco di cerchio di raggio v intersecante il fascio delle odografe, e i punti $P_1(t)$ compresi sul luogo dei punti di equal velocità v intersecante il fascio delle traiettorie. Si ricordi che per ogni coppia di punti P'_1, P_1 passano, nei due diagrammi, linee di equal tempo contraddistinte dallo stesso tempo t .

Nel disegno figurano le linee di equal velocità per i valori $v = 250, 275, 300, 350, 400$ m/sec. ricavate, non con il metodo delle tangenti, ma in funzione del parametro tempo che fa corrispondere ai vari archi di cerchio (raggio v) intersecanti il fascio di odografe le linee di equal velocità v , sulla tavola di tiro. Le linee di equal velocità assumono un aspetto sinuoso e variabile via via che si allontanano dal valore attribuito alla velocità iniziale V , dimostrando come possa sensibilmente variare la efficacia del tiro perforante con le coordinate del sito, cui corrisponde una velocità d'arrivo più o meno grande.

Con lo stesso procedimento parametrico sono state disegnate le *linee di equal inclinazione* per $\theta = 40^\circ 35^\circ 30^\circ 25^\circ 20^\circ 15^\circ 10^\circ 5^\circ 0^\circ$, tutte rappresentate in fig. 2 come corrispondenti a rette uscenti dal polo O' e intersecanti il fascio delle odografe sotto l'inclinazione θ . In particolare, per $\theta = 15^\circ$, la retta $O'A_7$ interseca le varie odografe nei punti $P'_2(t)$ cui corrispondono sul fascio di traiettorie i punti $P_2(t)$, ove l'inclinazione della traiettoria assume il valore di 15° : il luogo dei punti P_2 di contatto fra traiettoria e sua tangente parallela alla retta $O'P'$ inclinata di 15° sull'orizzonte, costituisce infatti la linea di equal inclinazione (15°).

Le linee di equal inclinazione assumono una concavità verso l'alto, che s'accentua in corrispondenza ai primi tratti delle traiettorie, ove si avvicinano alla forma di elisse, propria delle linee di equal inclinazione per il tiro nel vuoto.

(1) Sul fascio di odografe non figurano parte delle linee di equal tempo per rispettare la chiarezza del disegno.

MOTO NEL VUOTO.

La tavola di tiro nel vuoto si riduce come è noto al fascio di traiettorie paraboliche aventi origine comune in O e intersecate dall'orizzonte sui punti di caduta cui compete la velocità eguale alla velocità iniziale V .

E' noto che una qualsiasi retta orizzontale di ordinate:

$$y = \frac{V^2 - v^2}{2g}$$

intersecante il fascio di traiettorie paraboliche rappresenta il luogo dei punti ove la velocità assume il valor costante v : in particolare, per $y = 0$, l'asse delle ascisse OX rappresenta la linea di egual velocità V . Alle rette orizzontali di egual velocità v , corrispondono altrettanti cerchi di raggio v (centro sul polo O') sul diagramma polare delle odografe il quale, nel particolare caso del tiro nel vuoto, è costituito da un fascio di rette verticali (1) di equazione:

$$x' = V \cos \varphi = v \cos \theta = \text{cost.}$$

tutte normali all'asse polare $O'X'$ e ciascuna caratterizzata dal valore attribuito all'angolo di proiezione φ (parametro del fascio) compreso nell'angolo di tiro.

In fig. 3 sono rappresentate tre parabole appartenenti al fascio di traiettorie descritte dal proietto lanciato nel vuoto con velocità $V = 710$ m/sec. sotto gli angoli di proiezione $\varphi = 45^\circ 30' 15''$. Sono pure rappresentati in figura le corrispondenti tre odografe rettilinee e verticali aventi origine nei punti A_1, A_2, A_3 disposti sull'arco di cerchio di raggio V nell'intersezione con i tre raggi uscenti dal polo O' e rispettivamente inclinati sull'orizzonte dei tre angoli considerati.

Ai quattro archi di cerchio descritti sul diagramma delle odografe con raggio $v = 700, 650, 600, 550$ mm. corrispondono le quattro rette orizzontali di ordinate $y = 7,18; 41,59; 73,44; 102,75$; che rappresentano le linee di egual velocità per le quattro velocità considerate.

Scelti gli angoli di inclinazione $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ sulla stessa figura sono state costruite le corrispondenti tre *linee di egual inclinazione*, come luoghi dei punti in cui la tangente delle traiettorie assume il valore costante assegnato seguendo il procedimento parametrico (analogo a quello suggerito nel caso di tiro nell'aria) che permette di stabilire, tramite il tempo, la corrispondenza fra i punti P'_2 e i punti P_2 rispettivamente appartenenti al fascio delle odografe e al fascio delle traiettorie; in particolare, individuati i punti

(1) Ricordiamo che la curva odografa rappresenta anche la traiettoria descritta dal moto fittizio di un punto animato da una velocità pari all'accelerazione del moto reale. Nel caso del vuoto, l'odografa si riduce ad una retta verticale come traiettoria descritta da un punto fittizio in moto di caduta uniforme con velocità g .

P'_2 , come intersezione fra odografe e raggio uscente da O' inclinato di θ (p. e. $O'A_3$ inclinato di 15°), e attribuito a ciascuno di essi il tempo t competente, risulta la linea di egual inclinazione ($\theta = 15^\circ$) congiungendo i punti in cui le traiettorie intersecano le linee di egual tempo contraddistinte dagli stessi tempi competenti ai punti prescelti P'_2 sul diagramma delle odografe.

Ricordiamo a tal proposito che, mentre nel piano di tiro (xy) le linee di egual tempo assumono la forma di cerchi di raggio $V \cdot t$ con centro sull'asse y , a quota $(-\frac{1}{2}gt^2)$, sul piano $x'y'$ (che contiene il fascio delle odografe verticali) le linee di egual tempo si riducono a cerchi di raggio costante V ma con centro sull'asse y' a quota $(-gt)$. Ciò, a conferma del fatto che, mentre la traiettoria *parabolica* vien descritta dal moto reale nel vuoto per effetto dell'abbassamento $\frac{1}{2}gt^2$ rispetto alla linea di proiezione, la sua odografa viene descritta per effetto dell'abbassamento gt , contato a partire dall'estremo vettore V che rappresenta in grandezza e orientamento la velocità iniziale.

PROPRIETÀ DELLE LINEE DI EGUAL INCLINAZIONE NEL TIRO NEL VUOTO.

Premesso che la tavola di tiro nel vuoto, riferita al sistema di assi coordinati ortogonali x, y , è costituita dal fascio di traiettorie paraboliche di equazione:

$$y = xtg\varphi - \frac{gx^2}{2V^2\cos^2\varphi}$$

ove l'angolo di proiezione φ rappresenta il parametro che individua ciascuna traiettoria compresa nel fascio caratterizzato dalla velocità iniziale costante V ; e premesso ancora che l'inclinazione θ in un punto P generico di una qualsiasi traiettoria è espressa dalla relazione derivata:

$$\frac{dy}{dx} = tg\theta = tg\varphi - \frac{gx}{V^2\cos^2\varphi}$$

si può ricavare l'equazione del luogo dei punti di egual inclinazione eliminando il parametro φ da entrambe le equazioni ora scritte. La geometria analitica insegna infatti a individuare il luogo dei punti aventi una proprietà comune (l'inclinazione θ) ricercando l'equazione del fascio di curve caratterizzate dal nuovo parametro θ che, nel nostro caso, assume l'aspetto di un fascio di coniche rispondenti all'equazione generale:

$$\frac{1 + tg^2\theta}{2}x^2 - tg\theta xy + 2y^2 + \frac{V^2}{g}tg\theta x - \frac{V^2}{g}y = 0$$

che si dimostra essere un fascio di ellissi (il discriminante è positivo) vincolato a passare per l'origine O degli assi di riferimento ($x = y = 0$) e per il punto B

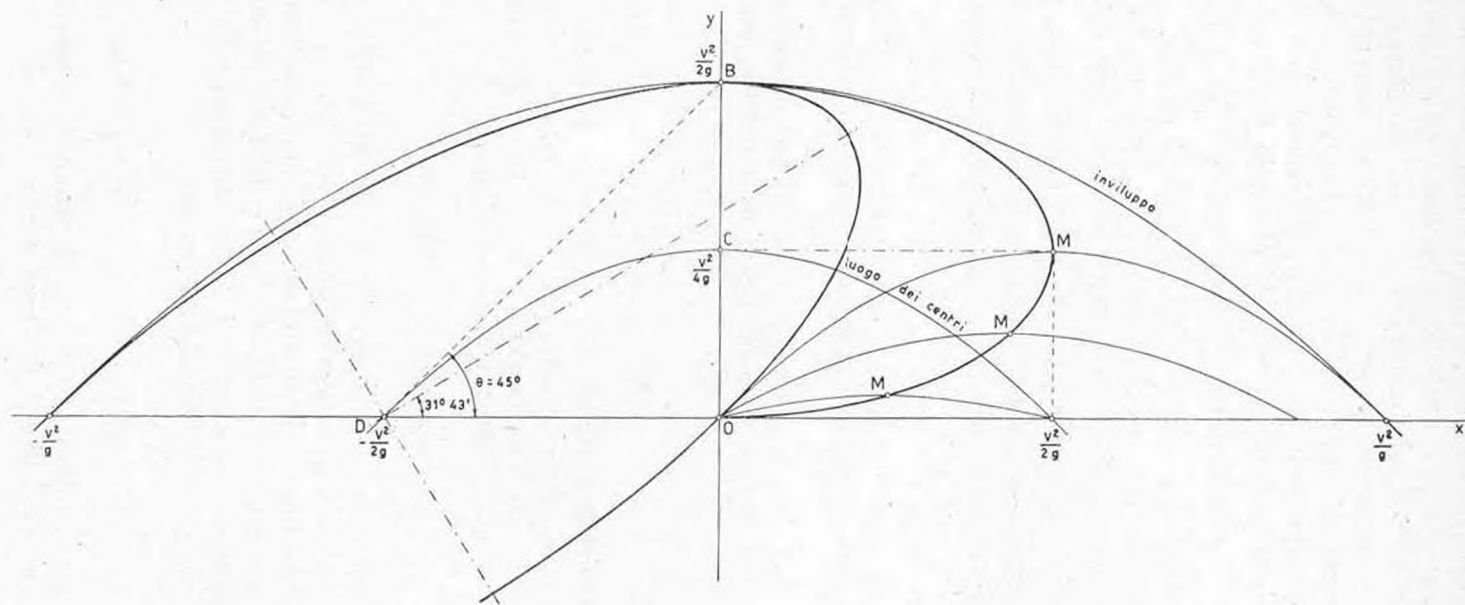


FIG. 4

$\left(x = 0; y = \frac{V^2}{2g}\right)$ situato sull'asse delle ordinate alla quota competente alla massima altezza di tiro nel tiro verticale verso l'alto (fig. 4). Ciascuna elisse del fascio, contraddistinto da un determinato valor di θ è tangente nell'origine alla traiettoria caratterizzata dall'angolo di proiezione $\varphi = \theta$; cioè l'inclinazione φ della linea di proiezione individua l'elisse di egual inclinazione $\theta = \varphi$.

Il centro dell'elisse di egual inclinazione θ risponde alle coordinate:

$$x_c = -\frac{V^2}{2g} \operatorname{tg} \theta$$

$$y_c = \frac{V^2}{4g} (1 - \operatorname{tg}^2 \theta)$$

e il luogo dei centri, rappresentato dall'equazione:

$$y = \frac{V^2}{4g} - \frac{gx^2}{V^2}$$

assume la forma di una parabola simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, con vertice nel punto C , $\left(y = \frac{V^2}{4g}\right)$ mediano del seguente OB misurato dall'altezza massima di tiro. Il vertice C coincide con il centro dell'elisse di egual inclinazione zero, cioè dell'elisse passante per i vertici M delle traiettorie paraboliche, ove appunto l'inclinazione θ si riduce a zero. Riferendo tale elisse al suo centro in $C(XY)$, l'equazione generale della conica per $\theta = 0^\circ$ assume la forma canonica:

$$\frac{X^2}{\left(\frac{V^2}{2g}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{V^2}{4g}\right)^2} = 1$$

che permette di dedurne le proprietà, e in particolare la misura degli assi.

Nella figura 4 è rappresentato inoltre l'elisse di egual inclinazione $\theta = 45^\circ$, corrispondente all'angolo di proiezione che compete alla traiettoria di gittata massima. Tale elisse passando ancora per i punti del sistema O e B porta il suo centro nel punto D sull'asse delle ascisse a distanza $x = -\frac{V^2}{2g}$ e precisamente nel punto in cui la parabola, luogo dei centri, interseca l'asse orizzontale.

Notiamo infine che l'involuppo delle traiettorie espresso dalla equazione:

$$y = \frac{V^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V^2}$$

conserva la forma parabolica coincidente con l'involuppo delle elissi di egual inclinazione, come appare dallo sviluppo analitico dell'equazione generale, e, in particolare, dal disegno rappresentato in fig. 4.

La breve trattazione del problema riguardante le linee di egual velocità e le linee di egual inclinazione mette in rilievo come, nel caso di tiro nell'atmosfera, convenga seguire il procedimento grafico suggerito ricorrendo alle nozioni fondamentali della meccanica elementare che riguardano la relazione parametrica fra traiettoria e sua odografa, mentre convenga attenersi al calcolo, nel caso di tiro nel vuoto, per tracciare le linee di egual inclinazione secondo le costruzioni grafiche indicate dalla geometria analitica. Dal confronto emerge chiaramente l'influenza della resistenza dell'aria sul moto reale del proietto nell'atmosfera, fornendo utili indirizzi nella soluzione dei problemi del tiro interessanti velocità e inclinazione della traiettoria.

NUOVI ORIENTAMENTI CIRCA LA DETERMINAZIONE DEI DATI DI TIRO DEL MOMENTO

Cap. d'art. Oscar Martinelli

VARIAZIONI E CORREZIONI DEL TIRO.

1. - Quando le condizioni del momento (balistiche ed atmosferiche) differiscono tutte od in parte da quelle tabulari, il tiro subisce *variazioni* che si manifestano con uno spostamento integrale della rosa dei colpi rispetto alla posizione che questa avrebbe assunto in condizioni tabulari.

Tali variazioni diconsi *sistematiche* perchè influiscono sull'intero sistema di traiettorie del cono di dispersione, senza modificarne sensibilmente nè l'apertura, nè la reciproca disposizione.

Pertanto ove la determinazione dei dati di efficacia non si possa, o non si debba, effettuare sperimentalmente col fuoco, il tiro si inizia apportando ai dati topografici dell'obiettivo le opportune *correzioni* calcolate in base alle condizioni balistiche ed atmosferiche del momento.

Queste correzioni hanno lo scopo di annullare l'effetto delle variazioni sistematiche e vengono denominate *correzioni del momento*.

2. - Si consideri (fig. 1):

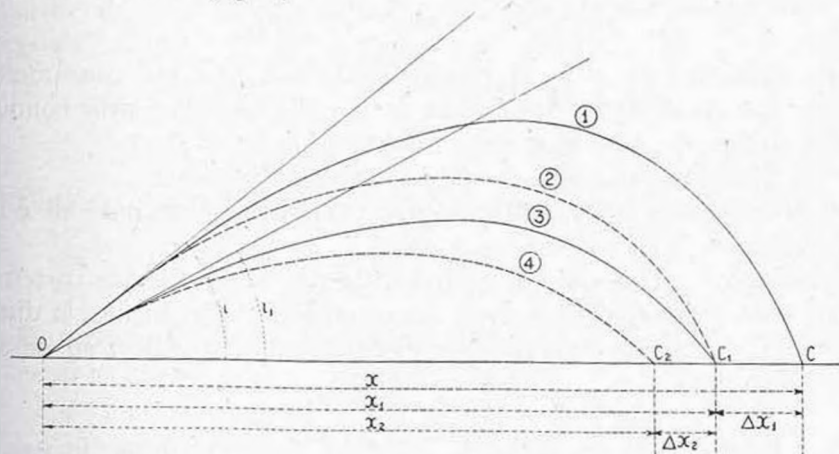


Fig. 1.

- la traiettoria tabulare (1) passante per C e relativa all'angolo di tiro i ;
- la traiettoria (2) passante per C_1 , relativa all'angolo di tiro i , ma realizzata in condizioni diverse da quelle tabulari;
- la traiettoria tabulare (3) passante per C_1 e relativa all'angolo di tiro i_1 ;
- la traiettoria (4) passante per C_2 , relativa all'angolo di tiro i_1 e realizzata nelle stesse condizioni della traiettoria (2).

Dall'esame della figura risulta evidente che le condizioni del momento considerate, alterando i parametri delle traiettorie tabulari (1) e (3) hanno dato luogo alle traiettorie (2) e (4) più corte di quelle tabulari. In particolare, nel caso dell'angolo i il tiro ha subito un accorciamento pari alla variazione $-\Delta x_1$; nel caso dell'angolo i_1 il tiro ha subito, invece, un accorciamento pari alla variazione $-\Delta x_2$ diversa, in valore assoluto, dalla precedente.

Il diverso valore delle due variazioni dipende dal fatto che le differenze di gittata dovute a variazioni nelle condizioni del tiro variano in ragione diretta della distanza ed in misura non proporzionale.

3. - Per colpire il punto C_1 a distanza x_1 , nelle condizioni considerate al n. 2, se si applicasse alla distanza topografica la correzione $+\Delta x_2$ (variazione col segno opposto relativa alla distanza x_1) si realizzerebbe una traiettoria che non passerebbe per C_1 , bensì per un punto a distanza inferiore. Per colpire il punto C_1 è necessario realizzare, invece, la traiettoria deformata (2), relativa all'angolo i . Questa traiettoria è definita dalla distanza x , uguale a quella del punto C_1 modificata della correzione $+\Delta x_1$. Da ciò si deduce che le variazioni e le correzioni relative alla stessa distanza sono di segno opposto e, in ogni caso, diverse in valore assoluto. Soltanto nel caso di variazioni di piccola entità, si può, in pratica, ritenere che le correzioni siano uguali e di segno opposto alle variazioni.

4. - In relazione a quanto è stato detto ai nn. 2 e 3 si può concludere che il valore assoluto di una *differenza* Δx dovuta alle variazioni nelle condizioni del tiro può essere considerata sotto il duplice aspetto di:

- *variazione* relativa ad una determinata *distanza* x ;
- *correzione* relativa alla *distanza* x_1 ottenuta sommando ad x la relativa variazione.

La distanza x può, quindi, essere considerata come distanza corretta necessaria per raggiungere, in determinate condizioni del momento, la distanza topografica x_1 , oppure come distanza di aggiustamento relativa ad un segno posto a distanza x_1 .

5. - I coefficienti riportati nelle tavole di tiro attualmente in uso, rappresentano, in valore assoluto, le variazioni in gittata, in scostamento ed in

graduazione di spoletta dovute alla variazione percentuale unitaria dei parametri della traiettoria (T. T. di tipo italiano), oppure alla variazione unitaria dei singoli elementi balistici ed atmosferici. Per la loro determinazione (T. T. di tipo italiano) è stata impiegata la formula generale delle variazioni:

$$\frac{\Delta x}{x} = f_{\varphi} \frac{\Delta \Phi}{\Phi} + f_{C'} \frac{\Delta C'}{C'} + f_V \frac{\Delta V}{V}$$

(agli infinitesimi sono state sostituite le differenze finite) dalla quale risulta evidente che per effetto delle variazioni dei parametri la gittata x subisce la variazione Δx . Tali coefficienti hanno, però, il segno opposto alla variazione e sono stati impropriamente denominati « coefficienti di correzione ». Le nuove tavole di tiro, di prossima pubblicazione (es. T. T. per l'obice da 105/22) riporteranno i coefficienti con il loro vero segno e saranno denominati « coefficienti di variazione ».

6. - Ogni qualvolta si debba ricercare la correzione relativa ad una determinata distanza, bisogna tener presente quanto detto al n. 4.

Esempio n. 1. Ricavata nella T. T. la variazione relativa ad una determinata distanza, determinare la distanza alla quale la variazione col segno opposto (*correzione*) è applicabile.

$$x = 5000 \qquad \text{variazione } \Delta x = + 250$$

$$5000 + 250 = 5250.$$

La correzione $- 250$ è applicabile alla distanza 5250.

Esempio n. 2. Calcolare la correzione relativa ad una data distanza, valendosi delle variazioni desunte dalle T. T.

$$x = 7000$$

Dalle T. T. sono state desunte, per le distanze x , $x - 1000$, $x + 1000$ le seguenti variazioni:

6000	variazione $\Delta x = - 500$
7000	» $\Delta x = - 600$
8000	» $\Delta x = - 700$

Distanze alle quali sono applicabili le correzioni $+ 500$ e $+ 700$:

5500	correzione $\Delta x = + 500$
7300	» $\Delta x = + 700$

La correzione relativa alla distanza $x = 7000$ si ricava per interpolazione tra questi ultimi dati.

$$1800 : 200 = 1500 : X \quad ; \quad X = 167$$

Correzione $\Delta x = 667$ per $x = 7000$.

Differenza tra la variazione e la correzione è, in questo caso, di 67 m.

Il procedimento seguito in questo esercizio è stato riportato soltanto allo scopo di rendere più chiara la differenza tra le variazioni e le correzioni. In pratica la determinazione delle correzioni del momento si effettua come verrà indicato nei nn. 29 e 30.

7. - Da tutto quanto esposto nei nn. precedenti si possono trarre le seguenti conclusioni:

a) nel *procedimento di correzione dei dati topografici (procedimento diretto)* si debbono usare le correzioni;

b) nel *procedimento di riduzione dei dati di aggiustamento alle condizioni tabulari (procedimento inverso o di spoglio)* si debbono usare le variazioni.

CORREZIONI DEL MOMENTO.

8. - Quando gli elementi balistici ed atmosferici differiscono da quelli tabulari, si ammette che la variazione totale che il tiro subisce sia uguale alla somma algebrica delle rispettive variazioni parziali. Ciò non è teoricamente esatto in quanto la variazione relativa ad una condizione del momento viene influenzata a sua volta dalle altre condizioni.

L'entità degli errori che si commettono assumendo detta ipotesi sarebbe trascurabile soltanto nel caso di variazioni di piccola entità. Allo scopo di attenuare in ogni caso tali errori, le correzioni del momento distinte in:

- *correzioni del momento in distanza*
- *correzioni del momento in direzione*
- *correzioni del momento in spoletta*

vengono convenientemente suddivise in gruppi ed applicate secondo l'ordine indicato nei numeri che seguono.

9. - *Correzioni del momento in distanza.* — Vengono suddivise in quattro gruppi:

- a) *correzione del momento Δx_m ;*
- b) *correzione per il proietto non tabulare Δx_p ;*
- c) *correzione $\Delta x_{\alpha, \epsilon}$;*
- d) *correzione per la velocità di regime $\Delta v_{v, l}$.*

10. - La *correzione del momento Δx_m* , comune a tutti i pezzi di un gruppo ed utilizzabile per il periodo di validità del bollettino aerologico (n. 26), comprende:

— le correzioni per le condizioni riportate nel bollettino aerologico (B , τ e Wx);

- la correzione per la temperatura delle cariche;
- la correzione particolare per eventuali varianti alle condizioni delle tavole di tiro;
- la correzione per la rotazione della terra (materiali a grande gittata).

La correzione Δx_m viene ricavata dal grafico delle c. d. m. (nn. 32, 33) in base ai dati topografici dell'obiettivo.

11. - Sommando alla distanza topografica la correzione Δx_m si ottiene la *distanza corretta tabulare* (x_{c_t}). La traiettoria realizzabile con questa distanza passerebbe per l'obiettivo se:

- il proietto impiegato fosse tabulare;
- l'obiettivo fosse situato sull'orizzonte del pezzo;
- la velocità di regime del pezzo fosse uguale a quella tabulare.

12. - La *correzione per il proietto non tabulare* Δx_n è, di norma, uguale per tutti i pezzi di una batteria e comprende:

- le correzioni per il peso ed il tipo di proietto;
- le correzioni per il peso ed il tipo di spoletta.

La correzione relativa al peso del proietto o della spoletta si ricerca nella tavola di tiro per l'orizzonte del pezzo (1) in base alla x_{c_t} . La correzione per il tipo di proietto o di spoletta non tabulari si ricerca nelle apposite tabelle delle tavole di tiro in base alla x_{c_t} .

Sommando algebricamente le correzioni parziali (2) si ottiene la Δx_n .

Applicando alla x_{c_t} la correzione Δx_n , si ottiene la *distanza corretta* x_c (3). Con questa distanza la traiettoria passerebbe per il segno se l'obiettivo fosse sull'orizzonte del pezzo e se la velocità di regime del pezzo coincidesse con quella tabulare.

13. - La *correzione* $\Delta x_{\alpha, \epsilon}$ si ricava mediante l'apposito abbaco (*abbaco « A » della correzione $\Delta x_{\alpha, \epsilon}$*) (v. all. n. 4) in base alla velocità di regime (media) dei pezzi della batteria, alla x_c ed al sito dell'obiettivo.

Sommando algebricamente alla x_c la correzione $\Delta x_{\alpha, \epsilon}$ si ottiene la *distanza d'alzo corretta* $x_{\alpha, \epsilon}$.

(1) Le T.T. cui si fa riferimento, sono quelle di tipo unificato relative all'obice da 105/22.

(2) Questi dati sono riportati nelle T.T. come correzioni con il relativo segno e non come variazioni.

(3) Ove non esista la correzione Δx_p , la x_c coincide con la x_{c_t} .

14. - Quando la velocità di regime di un pezzo è diversa da quella tabulare, la x_{α_c} deve essere modificata della correzione $\Delta x_{v_{v,1}}$ relativa alla velocità del pezzo stesso.

A tal fine, ove il materiale sia munito di congegno d'alzo organizzato per la correzione automatica della velocità di regime, oppure si disponga del regolo di puntamento, la correzione viene automaticamente applicata al valore dell'alzo; negli altri casi occorre ricercare la correzione nella T. T. (all. n. 5) in base alla x_{α_c} ed alla $V_{v,1}$ ed applicarla alla x_{α_c} stessa. Si ottiene in tal modo la *distanza d'alzo del momento* x_{α_m} .

15. - *Correzioni del momento in direzione.* — Le correzioni del momento in direzione vengono suddivise in tre gruppi:

- a) *scostamento del momento* S_m ;
- b) *correzione per il proietto non tabulare* ΔS_p ;
- c) *correzione applicata automaticamente dall'apparecchio di puntamento.*

16. - Lo *scostamento del momento* S_m comprende le correzioni comuni a tutti i pezzi di un gruppo ed utilizzabili per il periodo di validità del bollettino aerologico. Queste correzioni si distinguono in:

- correzione per la componente laterale del vento ΔS_w ;
- correzione di scostamento per il proietto tabulare non corretta automaticamente dall'apparecchio di puntamento:
 - per i materiali *non muniti* del dispositivo per la correzione automatica della derivazione, la correzione è uguale al valore dello scostamento S ,
 - per i materiali *muniti* del dispositivo per la correzione automatica della derivazione, la correzione è uguale al valore ΔS_z ;
- correzione per la rotazione della terra (materiali a grande gittata).

Lo scostamento del momento S_m viene ricavato dal grafico delle correzioni del momento (nn. 32, 33) in base ai dati topografici dell'obiettivo.

Sommando algebricamente alla direzione topografica lo scostamento S_m si ottiene la *direzione corretta tabulare* d_{c_t} . Con questa direzione si colpirebbe l'obiettivo se il proietto impiegato fosse tabulare.

17. - La *correzione per il proietto non tabulare* ΔS_p è, di norma, uguale per tutti i pezzi di una batteria e si ricerca nelle T. T. in base alla x_{c_t} .

Modificando la d_{c_t} della ΔS_p , si ottiene la *direzione del momento* d_m (1).

18. - La *correzione applicata automaticamente dall'apparecchio di puntamento* comprende:

(1) Ove non esista la correzione ΔS_p , la direzione del momento d_m coincide con la d_{c_t} .

— per tutti i materiali, la *correzione per lo sbandamento del pezzo* corretta dall'apposita *livella*;

— per alcuni materiali anche la *correzione per la derivazione*.

19. - *Correzioni del momento in spoletta*. — Le *spolette meccaniche* richiedono una correzione di graduazione ΔG_m per tener conto dell'effetto che le condizioni del momento hanno sulla durata della traiettoria. Si tenga presente che, per un dato angolo di partenza, gli effetti che il sito ed il vento fittizio hanno sulla durata sono trascurabili.

Le condizioni per le quali viene calcolata la correzione ΔG_m sono:

- la velocità di regime;
- la temperatura delle cariche;
- la pressione barometrica;
- la temperatura balistica dell'aria.

La correzione ΔG_m si ricava sommando le correzioni parziali ricercate nella tavola di tiro (1) in base alle variazioni delle condizioni del momento ed alla distanza d'alzo del momento.

Sommando algebricamente alla G_α , letta nella tavola di tiro in base alla x_{zm} , la correzione ΔG_m si ottiene la *spoletta del momento* G_m .

20. - Le *spolette a miccia* oltre alle correzioni relative alla variazione di durata della traiettoria richiedono correzioni dovute all'influenza che alcune condizioni hanno sulla velocità di combustione della miccia (pressione barometrica e temperatura delle spolette) (2).

La correzione totale ΔG_m si ricerca come indicato al numero precedente.

Poichè per le spolette a miccia non è trascurabile la correzione dovuta al sito dell'obiettivo, occorre ricercare anche la correzione $\Delta G_{\alpha,h}$ in base alla distanza corretta x_0 ed al dislivello Δh . Questa correzione è riportata in un abbaco delle tavole di tiro.

Sommando algebricamente alla G_α la correzione $\Delta G_{\alpha,h}$, la correzione ΔG_m e la correzione ΔG_0 (per la caratteristica di età della partita di spolette impiegata) si ottiene la *spoletta del momento* G_m .

ACCERTAMENTO DEI DATI ATMOSFERICI E DETERMINAZIONE DEI DATI ATMOSFERICO - BALISTICI. (3).

21. - Nelle condizioni tabulari si suppone che:

(1) Attualmente queste correzioni sono riportate soltanto nelle T.T. relative ai materiali da 88/27 e da 140/30.

(2) Si assume come temperatura delle spolette, la temperatura ambiente in batteria.

(3) L'argomento trattato in questo e nei numeri successivi si *riferisce esclusivamente* alla determinazione dei dati atmosferici ed atmosferico-balistici necessari per il calcolo delle c.d.m. usando le nuove T.T. precedentemente citate e quelle relative ai materiali da 88/27 e a 140/30.

- l'aria sia immobile;
- la densità balistica all'origine del fascio sia uguale a quella normale ρ_0 che corrisponde all'altitudine h_0 attribuita all'origine stessa;
- gli elementi da cui la densità dipende, subiscano variazioni col variare della quota, secondo una determinata legge.

Nelle *condizioni reali* l'aria non è, generalmente, immobile e gli elementi della densità oltre ad avere, all'origine, valori diversi da quelli tabulari, variano, con la quota, seguendo una legge diversa da quella cui le tavole di tiro si riferiscono.

Per le correzioni del tiro occorre misurare, quindi, per una traiettoria di determinata altezza, i singoli elementi atmosferici nello strato di aria compreso tra l'orizzonte del pezzo ed il piano ad esso parallelo passante per il vertice della traiettoria stessa.

Poichè non è praticamente possibile eseguire misurazioni aerologiche per un numero molto grande di traiettorie, si è stabilito di considerare un numero limitato di *traiettorie base*. Soltanto per queste vengono misurati e determinati i dati atmosferico-balistici.

Come elemento di riferimento delle traiettorie è stato scelto, per convenienza, la *durata*, in relazione all'ipotesi secondo la quale: traiettorie di uguale durata, comunque ottenute, raggiungono approssimativamente la stessa altezza. ($Y \approx 1,226 T^2$).

I dati atmosferico-balistici così determinati possono essere utilizzati da tutte le artiglierie terrestri senza distinzione di specie o di calibro.

22. - *Vento fittizio*. — Per le correzioni del tiro, anzichè il vento reale variabile lungo la traiettoria, occorre considerare un *vento fittizio*, orizzontale e costante, equivalente ad esso negli effetti globali.

La direzione *da cui spira* il vento fittizio è sempre riferita al Nord Rete.

Per determinare il *vento fittizio* relativo ad una determinata traiettoria, si suddivide lo strato di aria compreso tra l'orizzonte ed il vertice in un certo numero di sottostrati di uguale spessore. Con osservazioni aerologiche eseguite a mezzo di palloni pilota si ottengono, per ciascun sottostrato, l'intensità e l'azimut del vento reale. Si scompone il vento reale di ciascun sottostrato secondo la direzione del Nord Rete e si moltiplicano le componenti così ottenute per opportuni fattori ponderali f_w che esprimono la diversa influenza che il vento ha sul moto del proietto nei vari sottostrati, ovviamente percorsi a velocità diversa (1). Si fa la somma dei prodotti $W_x f_w$ e quella dei prodotti $W_z f_w$. Le due sommatorie rappresentano le medie ponderali delle singole

(1) I valori dei fattori ponderali del vento aumentano a misura che ci si avvicina al vertice in quanto gli effetti del vento sono più sentiti nei tratti percorsi dal proietto a velocità minore.

componenti del vento reale misurato. Da queste si ricavano l'intensità e l'azimut del vento fittizio.

L'intensità e l'azimut del vento fittizio vengono riportati nel bollettino aerologico per le durate della traiettoria in esso considerate.

23. - *Densità dell'aria*. — La densità dell'aria dipende dalla *pressione barometrica* (B), dalla *temperatura ambiente* (τ) e dallo stato igrometrico (s). In luogo delle variazioni della densità si considerano le variazioni degli elementi da cui la densità stessa dipende.

Praticamente si considera l'effetto di variazione della pressione barometrica e quello globale dovuto alla variazione della temperatura e dello stato igrometrico.

24. - *Temperatura balistica dell'aria*. — Anzichè la *temperatura ambiente* variabile lungo la traiettoria conviene considerare una temperatura fittizia (*temperatura balistica dell'aria*), equivalente ad essa negli effetti globali. La differenza tra la temperatura balistica all'origine e quella tabulare equivale, perciò, nei suoi effetti globali, alle differenze esistenti tra la distribuzione reale alle diverse altezze e la distribuzione tabulare.

La temperatura balistica riportata nel bollettino aerologico per ciascuna durata di traiettoria rappresenta la media ponderale (1) dei valori reali misurati (2) nei diversi sottostrati dall'orizzonte al vertice. Il suo valore viene determinato con procedimento analogo a quello indicato per il vento fittizio. Nella determinazione della temperatura balistica si tiene conto anche dello stato igrometrico.

I coefficienti di variazione per la temperatura balistica dell'aria riportati nelle tavole di tiro, tengono conto della duplice influenza che la temperatura ha sulla ritardazione attraverso la densità e la compressibilità dell'aria.

25. - *Pressione barometrica*. — Il bollettino aerologico riporta il valore della pressione barometrica riferita al livello medio del mare.

Per le correzioni del tiro è sufficiente considerare la pressione all'origine della traiettoria in quanto le variazioni non tabulari che questa subisce con la quota vengono considerate nella determinazione della temperatura balistica dell'aria.

Per riportare il valore della pressione alla quota origine della traiettoria si impiega un grafico contenuto nell'allegato n. 8 della « Istruzione sul tiro » oppure si applica la regola pratica secondo la quale ad una *differenza di alti-*

(1) I fattori ponderali f_{τ} impiegati per la determinazione della temperatura balistica sono alquanto diversi da quelli impiegati per il vento.

(2) La temperatura reale alle varie quote che interessano viene misurata valendosi di radio-sonde o di termografi sistemati su aerei.

tudine di 100 m. in *più* o in *meno*, corrisponde una *differenza di pressione*, in *meno* od in *più* di circa 8 mm.

26. - *Bollettino aerologico*. — Il bollettino aerologico viene compilato dalle sezioni aerologiche e diramato nella seguente forma:

```

XXXXX
GG HH MM
NNNNN
BBB
DDTT   WWAAAA
DDTT   WWAAAA
DDTT   WWAAAA
. . . . .
. . . . .

```

Le lettere indicano:

XXXXX: stazione aerologica;
 GG HH MM: giorno ed ora intermedia di validità del bollettino;
 NNNNN: numero d'ordine del bollettino;
 BBB: pressione barometrica riferita al livello medio del mare, in millimetri;
 DDTT: numero di quattro cifre del quale le prime due DD indicano la durata della traiettoria in secondi, le altre due TT il valore della temperatura balistica, in gradi, relativo alla traiettoria di durata DD;
 WWAAAA: numero di sei cifre relativo alla durata precedente DD del quale le prime due WW indicano la velocità del vento fittizio in m/s, le altre quattro l'azimut rete del vento in ettogradi e millesimi.

CALCOLO DELLE CORREZIONI DEL MOMENTO Δx_m e S_m .

27. - Il procedimento di calcolo delle correzioni del momento per l'intero settore d'azione, comprende le seguenti operazioni:

- calcolo delle c. d. m. per determinate durate di traiettoria e determinate direzioni di tiro;
- controllo dei calcoli eseguiti;
- determinazione delle distanze alle quali le correzioni sono applicabili.

28. - Le tavole di tiro portano, nella Parte IV, per ciascuna carica, apposite tabelle che forniscono i valori delle c. d. m. in funzione delle durate di traiettoria e dei diversi valori della pressione barometrica, della temperatura delle cariche, della temperatura balistica e delle componenti longitudinale e laterale del vento (*v. all. n. 2*).

29. - Le direzioni per le quali si effettua il calcolo delle c. d. m. sono, di norma, la L. Z., 500° e 5900° . Le durate, per ciascuna carica, sono riportate nelle tabelle citate nel numero precedente.

Per rendere più agevole il calcolo è opportuno valersi di un apposito specchio (*v. pag. 33*).

Ricavati dal bollettino aerologico la pressione barometrica al livello medio del mare, la temperatura balistica ed il vento fittizio relativi alle durate di traiettoria che interessano, si trascrivono tali dati sullo specchio unitamente alla temperatura delle cariche misurata in batteria. Si riporta, quindi, il valore della pressione alla quota origine delle traiettorie.

Valendosi del grafico per la scomposizione del vento (*v. all. n. 1*) si determinano le componenti W_x e W_z per i diversi valori del vento e per ciascuna direzione considerata, e si trascrivono sullo specchio.

Effettuate queste operazioni preliminari, si ricercano, nelle tabelle sopra citate (*v. all. n. 2*), le correzioni parziali Δx_B , Δx_t , Δx_z in base al valore dei singoli elementi e delle durate di traiettoria considerate.

Si ricercano, quindi, le correzioni Δx_w e ΔS_w in base alle componenti del vento e si attribuiscono alle correzioni stesse i segni opposti, rispettivamente, a W_x e W_z .

Si sommano, per le varie durate di traiettoria e per ciascuna direzione, le correzioni del momento in distanza ($\Delta x_B + \Delta x_t + \Delta x_z + \Delta x_w$) e si ottiene la Δx_m .

Aggiungendo alla ΔS_w lo scostamento oppure la correzione per lo scostamento, si ottiene lo scostamento del momento S_m .

Il calcolo deve essere controllato mediante una operazione indipendente dalla prima. A tale scopo il calcolo delle correzioni viene effettuato presso due posti comando.

30. - Effettuato il controllo del calcolo, si procede alla *determinazione delle distanze alle quali le correzioni sono applicabili*. A tale scopo si ricercano nella Parte IV delle T. T. (Tabella intestata « Distanze relative alle durate T ed al valore di velocità di regime del pezzo ») (*v. all. n. 3*) i valori delle distanze in base alle durate di traiettoria considerate ed alla velocità media di regime dei pezzi di un gruppo. Per queste distanze le correzioni calcolate rappresentano le *variazioni con il segno opposto* (nn. 4, 5 e 6). Sottraendo, quindi, le Δx_m alle distanze così ricavate, si ottengono i valori delle distanze alle quali le correzioni sono applicabili.

31. - Le correzioni del momento Δx_m e gli scostamenti del momento S_m calcolati secondo il procedimento normale indicato nei numeri precedenti, sono applicabili, teoricamente, soltanto ad obiettivi posti sull'orizzonte del pezzo. Quando il dislivello batteria-obiettivo non superi 300 o 400 metri dette correzioni possono essere ancora utilizzate senza commettere errori apprezzabili.

Ove questi limiti siano superati (zone d'azione con forti dislivelli), gli errori conseguenti alla utilizzazione delle correzioni per l'orizzonte sono rilevanti in quanto gli elementi atmosferico-balistici (τ e W) relativi a due traiettorie che raggiungono la stessa distanza l'una sull'orizzonte del pezzo, l'altra su di una linea di sito, sono alquanto diversi. In particolare (fig. 2) la

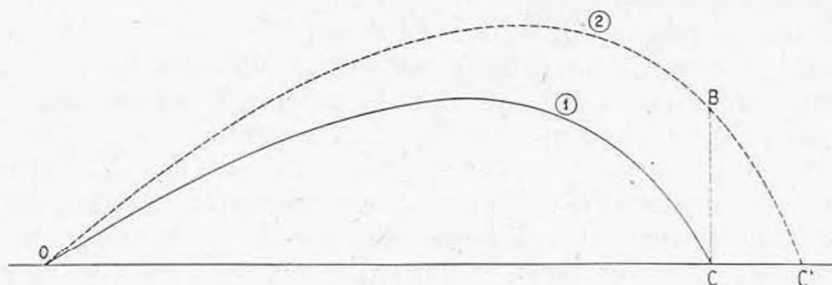


Fig. 2.

temperatura balistica ed il vento fittizio relativi alla traiettoria (1) non possono essere riferiti alla traiettoria (2) ove questa raggiunga un'altezza notevolmente maggiore della traiettoria (1).

Il calcolo delle c. d. m. (Δx_m ed S_m) subisce, in questo caso, una variante rispetto al procedimento normale.

I valori della temperatura balistica e del vento fittizio, da riportare sullo specchio delle c. d. m. in base alle durate di traiettoria considerate nelle tavole di tiro, vengono ricavati dal bollettino aerologico per *durate fittizie* diverse da quelle normali. Le durate fittizie si ricercano nella Parte IV delle T. T. « Tabella delle durate fittizie » (*v. all. n. 3*) in base alle durate di traiettoria normali ed al sito ϵ di valore intermedio fra quelli che esso può assumere entro i limiti del campo d'azione. Tali durate fittizie si impiegano esclusivamente per la lettura dei dati sul bollettino aerologico.

Ad eccezione di questa variante, il calcolo segue il procedimento normale.

Costruzione del grafico delle correzioni del momento.

32. - Su di un foglio di carta millimetrata (fig. 3) si tracciano due assi ortogonali e si assume quello orizzontale come asse delle distanze di tiro, quello verticale come asse delle correzioni Δx_m ed S_m .

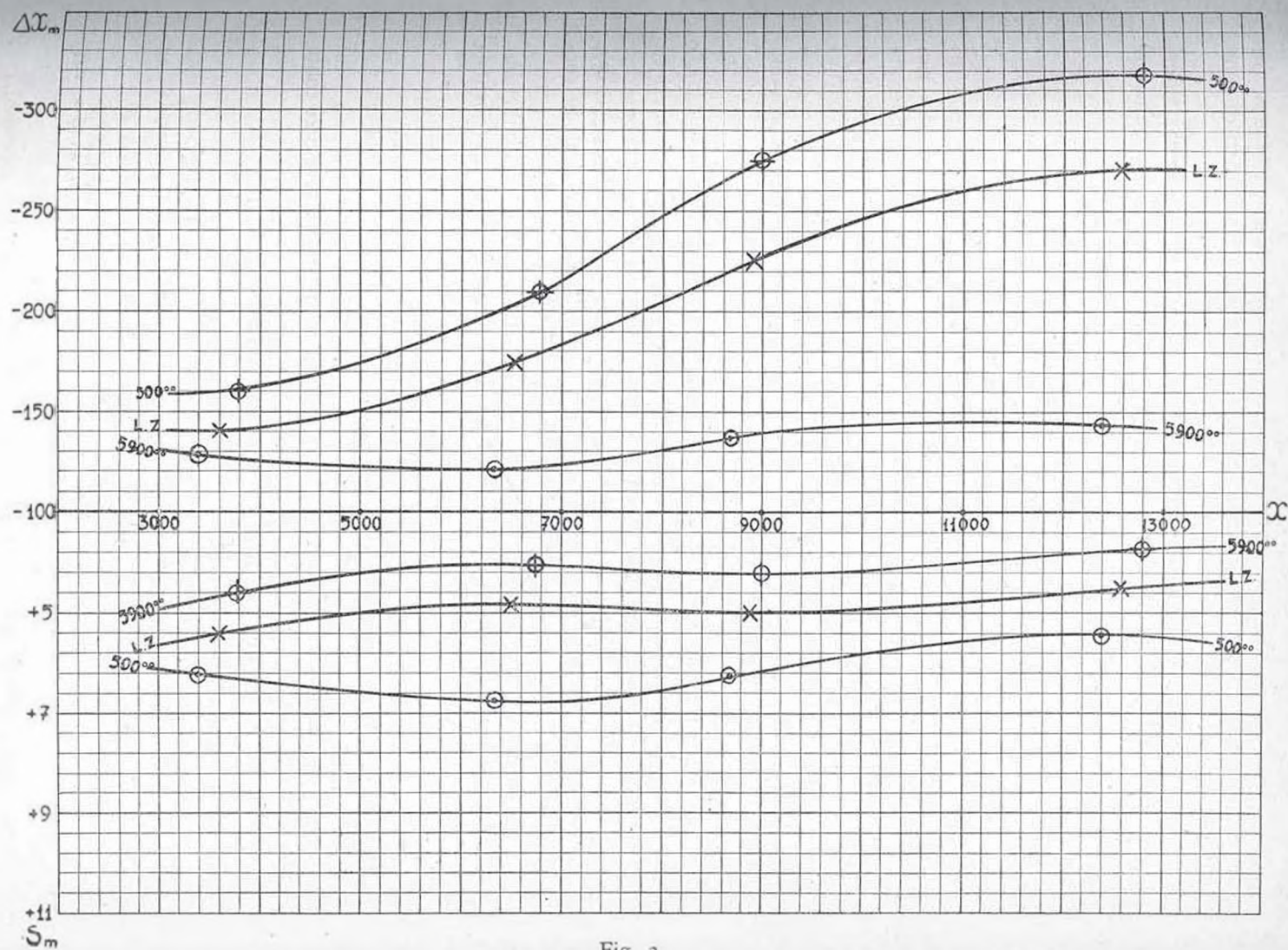


Fig. 3.

Si riportano, quindi, sull'asse delle x , i valori di distanza, compresi fra la minima e la massima di impiego normale della carica, intervallati di 1000 in 1000 metri.

Sull'asse delle correzioni si riportano, nel quadrante superiore i valori Δx_m , numerati ogni 25 metri, nel quadrante inferiore i valori S_m , numerati ogni 5° .

Le scale da impiegare debbono essere del seguente ordine:

per le x	1 : 50.000;
per le Δx_m	1 : 5.000;
per gli S_m	2 mm. = 1°

ed uguali per tutte le cariche. In base all'entità dei valori minimi e massimi delle correzioni, è consigliabile aumentare dette scale, ma non diminuirle.

Si riportano, quindi, sul sistema di assi, in corrispondenza di ciascuna delle distanze ricavate come detto al n. 28, i rispettivi valori Δx_m (nel quadrante superiore) e S_m (nel quadrante inferiore). Unendo i punti riportati relativi a durate diverse, ma riferiti alla stessa direzione di tiro si ottengono tre linee per le correzioni Δx_m e tre per gli scostamenti S_m . Tali linee vengono contrassegnate con i valori di direzione (5900° , L. Z., 500°).

33. - Per ricavare dal grafico la correzione Δx_m e lo scostamento S_m per un dato obiettivo, si segnano rispettivamente sulla parte superiore ed inferiore del grafico lungo la verticale corrispondente alla distanza topografica dell'obiettivo, due punti in base alla direzione topografica dell'obiettivo stesso (1). La correzione Δx_m e lo scostamento S_m si leggono sulle scale verticali in corrispondenza delle orizzontali tracciate per i punti sopra segnati.

Il grafico delle correzioni del momento ha la stessa validità del bollettino aerologico impiegato nella determinazione delle correzioni stesse (normalmente 4 ore).

DETERMINAZIONE DEI DATI DI TIRO DEL MOMENTO.

34. - I dati di tiro del momento α_m , d_m , G_m vengono determinati come già detto al n. 8 e segg.

Si riporta, qui di seguito, lo schema delle varie operazioni:

— *determinazione dell'alzo del momento α_m :*

$$\begin{aligned} 1^\circ - x + \Delta x_m &= x_{c_t} \\ 2^\circ - x_{c_t} + \Delta x_p &= x_c \\ 3^\circ - x_c + \Delta x_{\alpha, z} &= x_{\alpha_c} \\ 4^\circ - x_{\alpha_c} + \Delta x_{v_{v, l}} &= x_{\alpha_m} \end{aligned}$$

dalla T. T. $\Rightarrow \alpha_m$.

(1) I punti vengono segnati interpolando tra i valori delle linee delle correzioni.

— *determinazione della direzione del momento d_m :*

$$1^\circ - d + S_m = d_{ct}$$

$$2^\circ - d_{ct} + \Delta S_p = d_m$$

— *determinazione della spoletta del momento G_m :*

$$G_\alpha + \Delta G_{\alpha,h} + \Delta G_m + \Delta G_e = G_m$$

* * *

Questi nuovi orientamenti, attualmente applicati soltanto con i materiali da 88/27 e da 140/30, pur non presentando, nelle loro linee generali notevoli differenze rispetto ai procedimenti riportati nella I. T. Parte 2^a « Tiro contro obiettivi terrestri » Ed. 1943, rendono più spedita la ricerca dei dati di tiro del momento e conferiscono ai dati stessi una migliore approssimazione.

Tale migliore approssimazione è essenzialmente dovuta:

— al fatto che si considerano i veri valori delle correzioni in luogo delle variazioni col segno opposto;

— all'impiego dei dati atmosferico-balistici (temperatura balistica dell'aria e vento fittizio) risultanti da una media ponderale balistica dei valori reali misurati nei vari strati dell'atmosfera;

— alla correzione per l'influenza che la temperatura ha sulla compressibilità dell'aria;

— alla suddivisione delle correzioni in gruppi più rispondenti alle esigenze pratiche e tali da rendere trascurabili gli errori di reciproca influenza.

Il grafico delle correzioni del momento, compilato dai posti comando di gruppo e distribuito alle batterie, consente la determinazione immediata della correzione del momento Δx_m e dello scostamento del momento S_m per qualsiasi obiettivo compreso nel settore d'azione. Tale grafico ha, nei confronti delle tabelle delle correzioni del momento descritte nei paragrafi n. 140 e 141 della I. T., l'evidente vantaggio di fornire le correzioni in funzione non soltanto della distanza, ma anche della direzione, e di non richiedere calcoli laboriosi ogni qualvolta si debba eseguire un tiro con dati corretti, eliminando così gli errori che, nell'orgasmo della fretta e nelle condizioni ambientali in cui si opera, possono sempre essere commessi.

Alcuni esempi che seguono serviranno a porre maggiormente in evidenza quanto sopra è stato descritto.

COSTRUZIONE DEL GRAFICO DELLE CORREZIONI DEL MOMENTO

(Posto comando di gruppo)

Dati:

1° - Obice da 105/22; carica 3^a; velocità tabulare 238 m/s; velocità di regime 225 m/s; L. Z. 900°; quota del gruppo (media 515 m; $t = 30^\circ$; esplosivo polvere FNH; proietto di tipo e peso tabulari.

2° - Bollettino aerologico:

327	
251000	
15	
760	
0530	134790
1029	134750
2028	154640
3026	164550
4025	174500
.. .	

Calcolo delle correzioni. Lo specchio delle correzioni del momento (v. pag. 37) si compila come detto al n. 29, valendosi degli *allegati nn. 1 e 2.*

CORREZIONI DEL MOMENTO.

1	L. Z.	900 ⁰⁰	T'' 10			T'' 20			T'' 30			T''		
2	B. L. M. M.	760												
3	h. gruppo	515	τ 29 W 13 w 4750			τ 28 W 15 w 4640			τ 26 W 16 w 4550			τ W w		
4	B. (h. gruppo)	719												
5	t	30 ⁰												
6	Esplosivo FNH													
	(1)		(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
			5900 ⁰⁰	L Z	500 ⁰⁰	5900 ⁰⁰	L Z	500 ⁰⁰	5900 ⁰⁰	L Z	500 ⁰⁰	5900 ⁰⁰	L Z	500 ⁰⁰
7	W (m/s)		13	13	13	15	15	15	16	16	16			
8	Azimut W- Azimut tiro		4350	3850	3350	4240	3740	3240	4150	3650	3150			
9	W _x		+ 5,5	+ 10,4	+ 12,9	+ 7,9	+ 13	+ 15	+ 9,5	+ 14,4	+ 16			
10	W _z		+ 11,7	+ 7,8	+ 2	+ 12,8	+ 7,5	+ 0,6	+ 12,8	+ 6,9	- 0,8			
11	ΔX_B		carica	+	- 8	carica	+	- 27	carica	+	- 41	carica	+	-
12	ΔX_t				43			74			83			
13	ΔX_τ				8			21			27			
14	ΔX_p													
15	Totali				59			122			151			
16	Totale (escluso ΔX_w)		- 59	- 59	- 59	- 122	- 122	- 122	- 151	- 151	- 151			
17	ΔX_w		- 5	- 9	- 11	- 28	- 45	- 52	- 64	- 96	- 107			
18	ΔX_m		- 64	- 68	- 70	- 150	- 167	- 174	- 215	- 247	- 258			
19	ΔS_w		- 2,6	- 1,8	- 0,4	- 6,2	- 3,7	- 0,3	- 9,4	- 5,1	+ 0,6			
20	S _z		- 2,7	- 2,7	- 2,7	- 7,5	- 7,5	- 7,5	- 18,5	- 18,5	- 18,5			
21	S _m		- 5,3	- 4,5	- 3,1	- 13,7	- 11,2	- 7,8	- 27,9	- 23,6	- 17,9			

Determinazione delle distanze alle quali le correzioni sono applicabili.
In base alla velocità di regime (225 m/s) si ricavano nell'allegato n. 3, per le durate considerate, i seguenti valori di distanza:

$$10'' x = 2100 ; 20'' x = 3660 ; 30'' x = 4400.$$

e si compila la seguente tabella (n. 30):

T''		10	20	30
x		2100	3660	4400
Δx_m	5900 ⁰⁰	— 64	— 150	— 215
	L. Z.	— 68	— 167	— 247
	500 ⁰⁰	— 70	— 174	— 258
Distanze alle quali le correz. Δx_m sono applicabili:				
	5900 ⁰⁰	2164	3810	4615
	L. Z.	2168	3827	4647
	500 ⁰⁰	2170	3834	4658

Costruzione del grafico delle correzioni del momento (fig. n. 4). Disponendo di un foglio di carta millimetrata delle dimensioni di cm. 30 × 21 si possono fissare, per le scale, i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \text{per le } x & 1 : 25.000 \\ \text{per le } \Delta x_m & 1 : 1.000 \\ \text{per } S_m & 5 \text{ mm.} = 2^{\circ}. \end{aligned}$$

Per tracciare le linee delle correzioni, ad es. quella definita dal valore di direzione 5900⁰⁰, si segnano, in base alle distanze 2164, 3810, 4615, tre punti nel quadrante superiore corrispondenti rispettivamente alle correzioni — 64, — 150, — 215 e tre punti nel quadrante inferiore corrispondenti rispettivamente agli scostamenti — 5,3⁰⁰, — 13,7⁰⁰, — 27,9⁰⁰. Unendo i tre punti, nei rispettivi quadranti, si ottengono le linee relative alla direzione 5900⁰⁰. Si ripetono le stesse operazioni per gli altri due valori di direzione.

DETERMINAZIONE DEI DATI DI TIRO DEL MOMENTO

(Posto comando di batteria)

a) Dati topografici dell'obiettivo:

$$\begin{aligned}d &= 6150^{\circ 00} \\x &= 3500 \text{ m.} \\ \varepsilon &= 40^{\circ 00}\end{aligned}$$

b) Valgono tutte le condizioni del momento riportate nell'esempio n. 1.

1° - Ricerca della distanza corretta (x_c) e della direzione del momento (d_m):Dal grafico delle c. d. m. (fig. 4), in base alla distanza 3500 m. ed alla direzione $6150^{\circ 00}$, si ricavano (linee tratteggiate)

$$\begin{aligned}\Delta x_m &= -139 \text{ m.} \\ S_m &= -9^{\circ 00} \\ x_c &= x + \Delta x_m = 3500 - 139 = \text{m. } 3361 \\ d_m &= d + S_m = 6150^{\circ 00} - 9^{\circ 00} = 6141^{\circ 00}\end{aligned} \quad (1)$$

2° - Ricerca della distanza d'alzo corretta (x_{α_c}):Entrando nell'abbaco « A » della correzione $\Delta x_{\alpha, \varepsilon}$ (all. n. 4) in base alla velocità di regime 225 m/s, alla distanza 3361 ed al sito $+40^{\circ 00}$ si trova il valore $+60$ m. di complemento di distanza d'alzo per il sito.

$$x_{\alpha_c} = x_c + \Delta x_{\alpha, \varepsilon} = 3361 + 60 = 3421$$

3° - Ricerca della distanza d'alzo del momento (x_{α_m}):Dalla tabella delle correzioni Δx per variazioni ΔV (all. n. 5) in base alla distanza d'alzo corretta 3421 ed al $\Delta V_{v, l} = -13$ m/s ($225 - 238$) si ricava $\Delta x_{v, e} = +367$ m.

$$x_{\alpha_m} = x_{\alpha_c} + \Delta x_{v, l} = 3421 + 367 \text{ m} = 3788$$

4° - Ricerca dell'alzo del momento (α_m):Dalla tavola di tiro per l'orizzonte del pezzo, in base alla x_{α_m} si ricava:

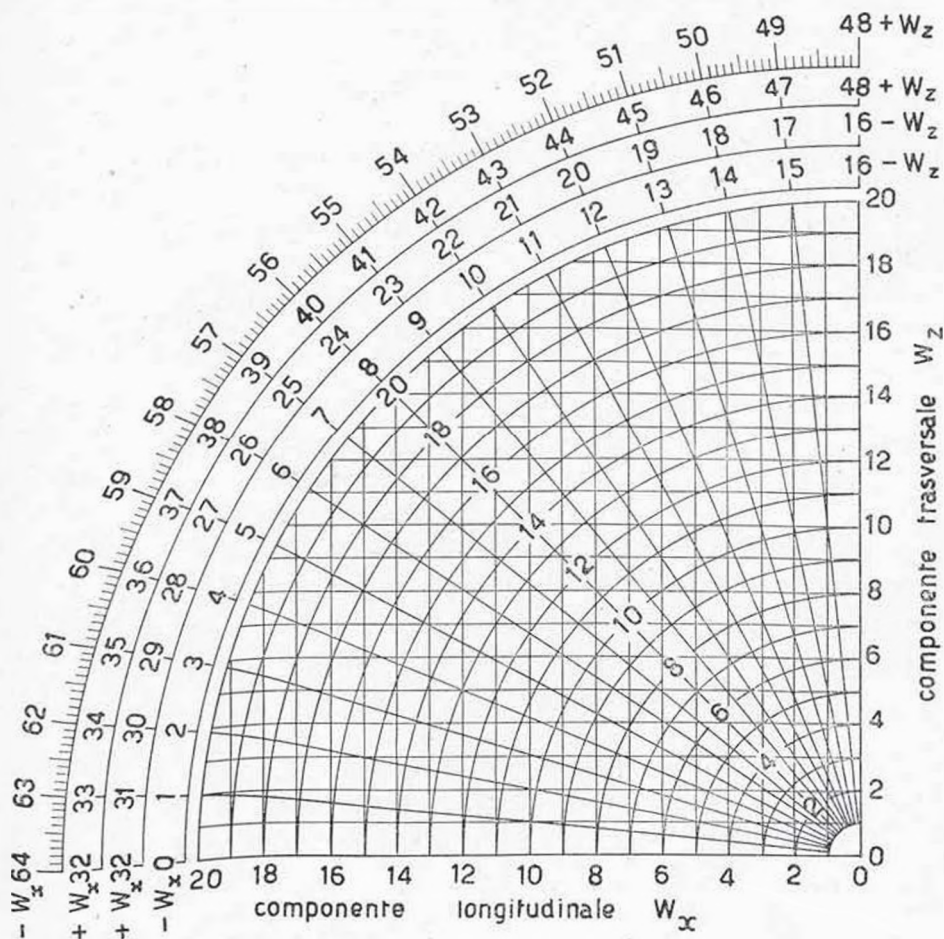
$$\alpha_m = 427^{\circ 00}$$

I dati di tiro del momento, da impiegare nel tiro di efficacia, sono quindi:

$$d_m = 6141^{\circ 00} ; \quad \varepsilon = +40^{\circ 00} ; \quad \alpha_m = 427^{\circ 00}$$

(1) Poichè il proietto da impiegare è di tipo e peso tabulari, la x_{α_c} coincide con la distanza corretta e la d_{c_l} coincide con la direzione del momento.

GRAFICO PER LA SCOMPOSIZIONE DEL VENTO.



Noti l'azimut e l'intensità del vento:

— si sottrae dall'azimut del vento l'azimut dell'obiettivo e si ottiene l'angolo con cui entrare nel grafico. Se il primo azimut è minore del secondo aggiungere 64.00° prima di fare la differenza;

— lungo il raggio che dà il valore di tale angolo si segna il punto della circonferenza contrassegnata dal numero che esprime in m/s la velocità del vento.

Le proiezioni di questo punto sui due assi danno le componenti del vento; il loro segno è indicato in corrispondenza della circonferenza sulla quale si è letto l'angolo.

TABELLE
DELLE CORREZIONI DEL MOMENTO

1) PRESSIONE BAROMETRICA				2) TEMPERATURA DELLE CARICHE				3) TEMPERATURA	
B	Durata T (sec.)			t	Durata T (sec.)			τ	10
	10	20	30		10	20	30		
mm.	m.	m.	m.	gradi C.	m.	m.	m.	gradi C.	m.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
800	+ 7	+ 23	+ 36	+ 40	— 72	— 124	— 141	+ 40	— 1
795	+ 6	+ 20	+ 31	+ 38	— 66	— 114	— 129	+ 38	— 1
790	+ 5	+ 17	+ 27	+ 36	— 60	— 104	— 118	+ 36	— 1
785	+ 4	+ 14	+ 22	+ 34	— 55	— 94	— 106	+ 34	— 1
780	+ 4	+ 11	+ 17	+ 32	— 49	— 84	— 95	+ 32	—
775	+ 3	+ 8	+ 12	+ 30	— 43	— 74	— 83	+ 30	—
770	+ 2	+ 5	+ 8	+ 28	— 37	— 63	— 72	+ 28	—
765	0	0	0	+ 26	— 31	— 53	— 60	+ 26	—
760	0	— 1	— 2	+ 24	— 25	— 43	— 49	+ 24	—
755	— 1	— 4	— 7	+ 22	— 19	— 33	— 37	+ 22	—
750	— 2	— 7	— 11	+ 20	— 13	— 23	— 26	+ 20	—
745	— 3	— 10	— 16	+ 18	— 7	— 13	— 14	+ 18	—
740	— 4	— 13	— 21	+ 15,56	0	0	0	+ 15,56	—
735	— 5	— 16	— 25	+ 14	+ 5	+ 8	+ 9	+ 14	+
730	— 6	— 19	— 30	+ 12	+ 11	+ 18	+ 20	+ 12	+
725	— 7	— 23	— 35	+ 10	+ 16	+ 28	+ 32	+ 10	+
720	— 8	— 26	— 40	+ 8	+ 22	+ 38	+ 44	+ 8	+
715	— 9	— 29	— 45	+ 6	+ 28	+ 48	+ 55	+ 6	+
710	— 10	— 32	— 49	+ 4	+ 34	+ 58	+ 67	+ 4	+
705	— 11	— 35	— 54	+ 2	+ 40	+ 69	+ 78	+ 2	+
700	— 12	— 38	— 59	0	+ 46	+ 79	+ 90	— 0	+
695	— 13	— 41	— 63	— 2	+ 52	+ 89	+ 101	— 2	+
690	— 14	— 44	— 68	— 4	+ 58	+ 99	+ 113	— 4	+ 1
685	— 15	— 47	— 73	— 6	+ 64	+ 109	+ 121	— 6	+ 1
680	— 16	— 50	— 78	— 8	+ 70	+ 120	+ 136	— 8	+ 1
675	— 17	— 53	— 82	— 10	+ 76	+ 130	+ 147	— 10	+ 1
670	— 18	— 56	— 87	— 12	+ 82	+ 140	+ 159	— 12	+ 1
665	— 19	— 59	— 92	— 14	+ 88	+ 150	+ 170	— 14	+ 1
660	— 19	— 62	— 97	— 16	+ 94	+ 160	+ 182	— 16	+ 1
655	— 20	— 65	— 102	— 18	+ 99	+ 170	+ 193	— 18	+ 1
650	— 21	— 68	— 106	— 20	+ 105	+ 180	+ 205	— 20	+ 1
645	— 22	— 72	— 111	— 22	+ 111	+ 191	+ 216	— 22	+ 1
640	— 23	— 75	— 116	— 24	+ 117	+ 201	+ 228	— 24	+ 1
635	— 24	— 78	— 121	— 26	+ 123	+ 211	+ 239	— 26	+ 1
630	— 25	— 81	— 125	— 28	+ 129	+ 221	+ 251	— 28	+ 1
625	— 26	— 84	— 130	— 30	+ 135	+ 231	+ 262	— 30	+ 1

CORREZIONI DEL MOMENTO.

ΔX						CORREZIONI ΔS			
LISTICA DELL'ARIA		4) VENTO LONGITUDINALE				6) VENTO TRASVERSALE			
Durata T (sec.)		W_x	Durata T (sec.)			W_z	Durata T (sec.)		
20	30		10	20	30		10	20	30
m.	m.	$\pm$ m/s	$\mp$ m.	$\mp$ m.	$\mp$ m.	$\pm$ m/s	$\mp$ mill.	$\mp$ mill.	$\mp$ mill.
(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(21)	(22)	(23)	(24)
- 42	- 63	30	27	105	200	30	6,7	14,5	22,1
- 38	- 58	29	26	102	193	29	6,5	14,0	21,4
- 35	- 52	28	25	98	187	28	6,2	13,6	20,6
- 31	- 47	27	24	95	180	27	6,0	13,1	19,9
- 28	- 42	26	23	91	173	26	5,8	12,6	19,2
- 25	- 37	25	22	88	167	25	5,6	12,1	18,4
- 21	- 32	24	21	84	160	24	5,4	11,6	17,7
- 18	- 27	23	20	81	153	23	5,1	11,1	17,0
- 15	- 22	22	19	77	147	22	4,9	10,6	16,2
- 11	- 17	21	19	74	140	21	4,7	10,2	15,5
- 8	- 12	20	18	70	133	20	4,5	9,7	14,7
- 4	- 6	19	17	67	127	19	4,2	9,2	14,0
0	0	18	16	63	120	18	4,0	8,7	13,3
+ 3	+ 4	17	15	60	113	17	3,8	8,2	12,5
+ 6	+ 9	16	14	56	107	16	3,6	7,7	11,8
+ 9	+ 14	15	13	52	100	15	3,4	7,3	11,1
+ 13	+ 19	14	12	49	93	14	3,1	6,8	10,3
+ 16	+ 25	13	11	45	87	13	2,9	6,3	9,6
+ 20	+ 30	12	11	42	80	12	2,7	5,8	8,8
+ 23	+ 35	11	10	38	73	11	2,5	5,3	8,1
+ 26	+ 40	10	9	35	67	10	2,2	4,8	7,4
+ 30	+ 45	9	8	31	60	9	2,0	4,4	6,6
+ 33	+ 50	8	7	28	53	8	1,8	3,9	5,9
+ 37	+ 55	7	6	24	47	7	1,6	3,4	5,2
+ 40	+ 61	6	5	21	40	6	1,3	2,9	4,4
+ 44	+ 66	5	4	17	33	5	1,1	2,4	3,7
+ 47	+ 71	4	4	14	27	4	0,9	1,9	2,9
+ 50	+ 76	3	3	10	20	3	0,7	1,5	2,2
+ 54	+ 81	2	2	7	13	2	0,4	1,0	1,5
+ 57	+ 86	1	1	3	6	1	0,2	0,5	0,7
+ 61	+ 91	0	0	0	0	0	0	0	0
5) PESO DEL PROIETTO						7) SCOSTAMENTO			
N. quadret.		m	m	m		mill.	mill.	mill.	
(17)		(18)	(19)	(20)		(25)	(26)	(27)	
		- 27	- 42	- 48		- 2,7	- 7,5	- 18,5	
		0	0	0					
		+ 27	+ 42	+ 48					

TABELLA DELLE DISTANZE
CORRISPONDENTI ALLE DURATE DI TRAIETTORIA
ED AI VALORI DI VELOCITÀ INIZIALE

Velocità iniziale V	Durata T (sec.)		
	10	20	30
	m	m	m
m/s			
250	2320	4140	5160
238	2220	3910	4800
225	2100	3660	4400
210	1950	3380	3910
195	1800	3100	3330

TABELLA DELLE DURATE FITTIZIE.

Angolo sito ε	Durata T (sec.)		
	10	20	30
	sec.	sec.	sec.
mill.			
400			
300			
200	19	31	
100	15	25	
0	10	20	30
— 100	5	15	21
— 200	1	3	15

ABBACO "A" DELLA CORREZIONE $\Delta \chi_{\text{c.t.}}$ (m.)

(Procedimento diretto)

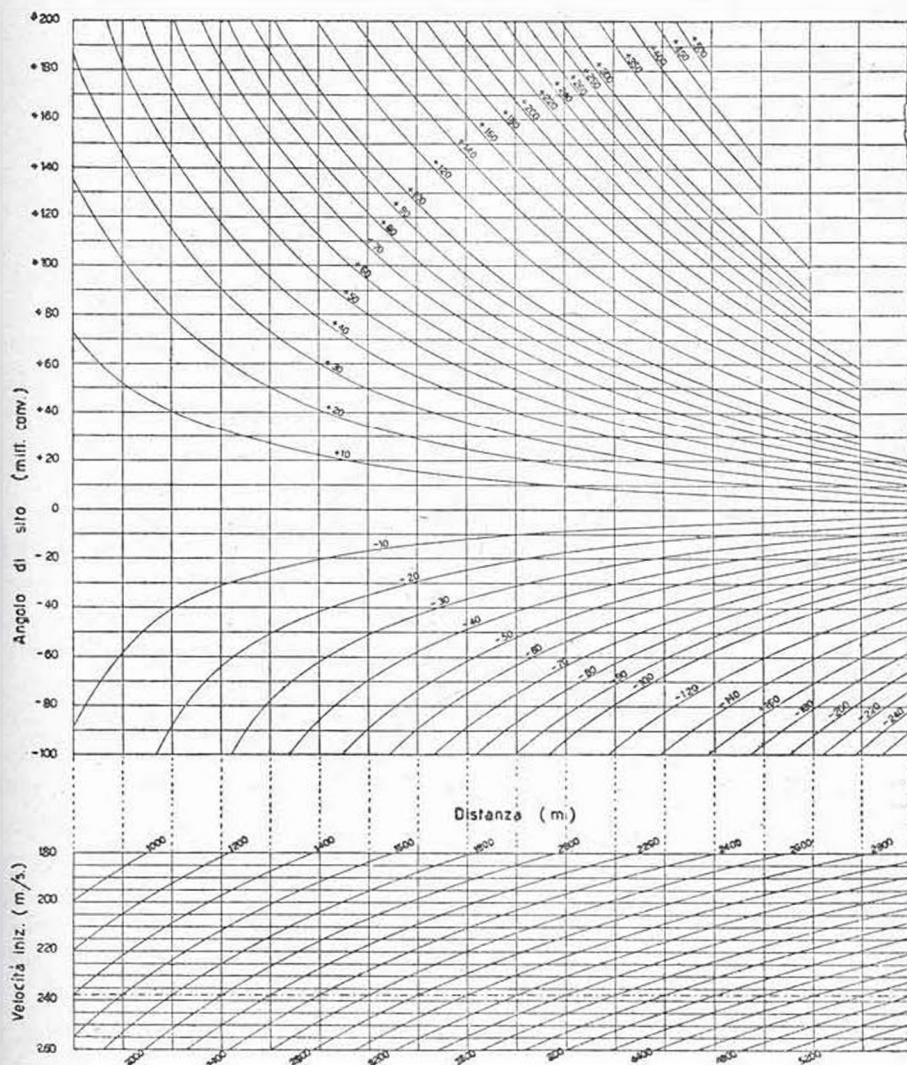


TABELLA DELLE CORREZIONI Δx CORRISPONDENTI ALLE VARIAZIONI
DELLA VELOCITÀ INIZIALE.

(Procedimento diretto)

Distanza X	Correzioni Δx per ΔV :			
	+ 15 m / s	- 15 m / s	- 30 m / s	- 45 m / s
m	m	m	m	m
500	- 55	+ 69	+ 153	+ 254
1000	- 112	+ 136	+ 300	+ 499
1500	- 167	+ 199	+ 441	+ 736
2000	- 220	+ 261	+ 576	+ 961
2500	- 273	+ 321	+ 705	+ 1174
3000	- 323	+ 378	+ 834	+ 1372
3500	- 373	+ 433	+ 947	+ 1563
4000	- 419	+ 485	+ 1055	
4500	- 464	+ 536		
4870	- 495			

BALISTICA E GEODESIA

TELEPROIETTO (PUNTO-MASSA)

SOGGETTO ALLA GRAVITÀ DEL CAMPO ELLISSOIDICO TERRESTRE

Prof. Giovan Battista Pacella

Ingegnere geografo capo dell'Istituto Geografico Militare

La presente memoria ripete le sue origini da quattro nostre note (1) apparse sulla « Rivista Militare » a proposito dei teleproietti, ed ha l'ufficio di raccogliere quegli studi, di migliorarne i risultati e di presentarli in un corpo di dottrina unitario. Nel complesso studia la traiettoria di un punto-massa soggetto al campo di gravità che ha una superficie di livello coincidente con l'ellissoide di rotazione terrestre ed altri attributi su cui qui si sorvola; campo in base al quale oggidì viene calcolata la gravità normale. Le equazioni del moto scritte secondo questo concetto vengono da noi integrate dopo avere richiamato o dimostrato alcune verità di Geodesia che, pur essendo per sè importanti, hanno qui l'ufficio di stabilire dei limiti di precisione. Questi limiti sono da prendersi in considerazione da due diversi punti di vista: Meccanico e Geodetico; al primo dei quali — più restrittivo — ci siamo attenuti. A vero dire la maggiore restrizione del primo vincolo è più apparente che reale in quanto si attenua imponendo la considerazione di ulteriori potenze di certi rapporti — come meglio sarà detto nel testo — senza ingenerare difficoltà di ordine più elevato. Tuttavia ci siamo limitati ai termini ritenuti bastevoli per non rendere (inutilmente a nostro avviso) complicata la trattazione. E ciò spieghi la precisione del millesimo perseguita e la distanza limite di 1000 km imposta.

La traiettoria è studiata nel vuoto ed i risultati, pur non essendo del tutto privi di carattere pratico, si addicono ad un avviamento allo studio del problema, avviamento utile quando si pensi anche al fine didattico che vorrebbe avere la presente memoria (2).

Lo studio si conclude col calcolo a 10^{-3} di una geodetica di 1300 km e le tavole di $\sqrt{\rho N}$ per l'ellissoide internazionale e per l'ellissoide di Bessel.

1. - L'avvento dei teleproietti promuove, fra gli altri problemi, quello di un più approfondito esame dei rapporti tra Balistica e Geodesia con un mag-

(1) G. B. PACELLA: *Geodesia e Balistica*. — Rivista Militare, 1950: nn. 6, 7, 12 e 1951: n. 3.

(2) Le linee essenziali sono state già mostrate al XII Corso di geodesia dell'I.G.M.

gior concorso di quest'ultima, come ha messo in evidenza recentemente in un suo articolo il generale Norcen (1). Questioni in parte note, e sopite per quanto riguarda talune correzioni, che risultano trascurabili nella prassi della balistica classica. Ma l'avvento del teleproietto — già lanciato a 300 km, e che col progredire della tecnica lascia prevedere di raggiungere obiettivi assai più lontani — esige una conoscenza sicura e diffusa dell'approssimazione con cui possono essere assegnati distanza ed azimut della geodetica « bocca da fuoco-punto d'arrivo », e delle correzioni di cui può abbisognare il calcolo della gittata a causa della variazione della curvatura della Terra, della rotazione diurna e della gravità.

Non è improbabile che la g possa essere considerata in altro modo in balistica e che in luogo dell'ordinaria traiettoria parabolica, generata nel modo noto, si debba considerare l'arco di orbita descritto da un punto attratto da un punto fisso. Sinora la traiettoria planetaria non è stata trattata in vista delle applicazioni nei testi di balistica. Essendo infatti in Astronomia variabile la forza agente e nulla la resistenza del mezzo ed in Balistica rilevante codesta resistenza e costante la g , lo Charbonnier (1907) concludeva che Astronomia e Balistica presentano due questioni una inversa dell'altra nei problemi secondari. Oggidì, con l'impiego dei teleproietti, diventa senza dubbio rilevante il campo di variazione della g e, pur non sembrando che muti lungo tutta la traiettoria quel rapporto tra Astronomia e Balistica sottolineato dallo Charbonnier, è chiaro che la maniera di conservare l'antica prassi è intanto quella di tener conto dell'effetto perturbante dovuto alla variazione di g .

In base a questo criterio, nella presente trattazione, gli argomenti sono stati studiati perseguendo i risultati come correzioni della traiettoria usuale nel vuoto e, come si suole trattando di perturbazioni, tutte le correzioni sono considerate indipendenti tra loro. Dalla presente trattazione esula tutto quanto riguarda la ritardazione.

CURVATURA TERRESTRE E DISTANZE

2. - Per quanto riguarda l'effetto della curvatura terrestre, che come si sa accorcia la distanza del punto di caduta, è stata calcolata la gittata X corrispondente alla distanza d (lungo la sfera) in alcuni casi, al fine di concludere un tabella. Il calcolo è stato condotto considerando che l'appartenenza del punto d'arrivo alla superficie di livello (sferica) per il centro della bocca da fuoco fa sì che il punto d'arrivo è sotto l'orizzonte del centro della bocca da fuoco di $h = R (1 - \cos \frac{d}{R})$; dove R è il raggio terrestre. Perciò è stata uguagliata l'ascissa del punto della traiettoria inferiore di h all'origine (punto

(1) ANTONIO NORCEN: *Dalla preparazione topografica alla preparazione geodetica del tiro*. — Rivista Militare, 1949.

d'arrivo) alla proiezione sull'asse delle x della distanza considerata lungo la sfera,

$$[1] \quad \frac{X}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2 \varphi}} \right) = R \sin \frac{d}{R}$$

ponendo $h = R \left(1 - \cos \frac{d}{R} \right)$; da cui è stato calcolato X .

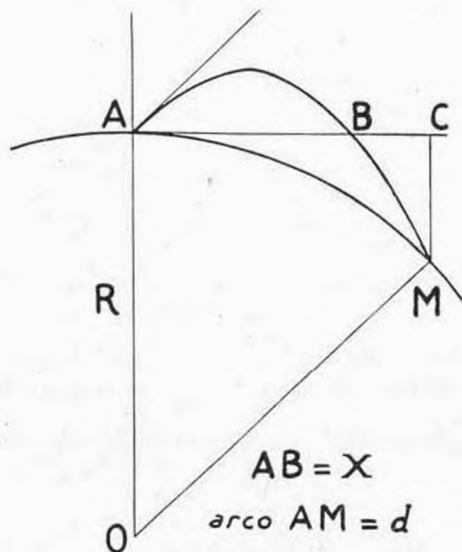


Fig. 1.

La traiettoria è intesa nel vuoto.

A vero dire nella [1] s'ignorano v e φ : assunto, come s'è fatto, l'angolo di tiro φ costantemente di 45° , rimane da fissare v in modo opportuno. In un primo tempo si è attribuito ad X il valore corrispondente di d e si è calcolato $v^2 = gX = gd$, quindi $v^2 \sin^2 \varphi$, e questo valore provvisorio ha consentito un primo calcolo di $\frac{2gh}{v^2 \sin^2 \varphi}$ e di X . Da questo nuovo valore di X è stato calcolato il valore più prossimo di $v^2 = gX$ ed un conseguente valore per $\frac{2gh}{v^2 \sin^2 \varphi}$ che introdotto nella [1], ha sortito la gittata X .

La tabella 1 fornisce, caso per caso, per nove distanze, il valore competente di $v^2 \sin^2 \varphi$ in dipendenza di un valore di X calcolato provvisoriamente in base alla d assegnata. E' supposto $\varphi = 45^\circ$; così ogni gittata ha sortito la velocità iniziale minima. A proposito della velocità iniziale si avverte che i dati tabellari in alcuni casi prescindono dalla possibilità di realizzazione con le attuali bocche da fuoco; tuttavia vengono considerati per il motivo che sarà chiarito in seguito.

TABELLA N. 1.

d	X $\left(X = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{g} = \frac{v^2}{g} \right)$ $\varphi 45^\circ \nu$ minimo	ν	$v^2 \sin^2 \varphi$
25.000 m	24.951 m	495 m/sec	122.500
30.000	29.929	542	146.689
50.000	49.805	699	244.036
100.000	99.223	987	487.204
200.000	196.931	1.390	966.289
300.000	293.159	1.696	1.437.601
400.000	387.963	1.951	1.904.400
500.000	481.370	2.173	2.362.369
1.000.000	923.85	3.010	4.529.695

Successivamente la tabella 2 dà, per la distanza d considerata, la quota h assunta dal punto d'arrivo per effetto della curvatura terrestre, il termine $\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2 \varphi}}$, la gittata definitiva e finalmente la differenza fra distanza e gittata.

TABELLA N. 2.

d	h	$\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2 \varphi}}$	$X = \frac{2R \sin \frac{d}{R}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2 \varphi}}}$	Distanza meno gittata
25.000 m	49 m	1,003915	24.951 m	49 m
30.000	71	1,004737	29.929	71
50.000	196	1,007849	49.804	196
100.000	784	1,015663	99.219	781
200.000	3.136	1,031346	196.881	3.119
300.000	7.053	1,047023	293.001	6.999
400.000	12.538	1,062625	387.601	12.399
500.000	19.585	1,078266	480.678	19.322
1.000.000	78.233	1,157665	923.128	76.872

Può giovare una ulteriore iterazione.

ROTAZIONE TERRESTRE

3. - Lo studio delle perturbazioni inflitte al punto pesante lungo la traiettoria dalla rotazione terrestre ci offre una prima occasione di integrare l'equazione del moto del punto pesante stesso.

Partiamo dalla ben nota equazione della Meccanica che va sotto il nome di equazione di Coriolis

$$\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{a}} + 2 \underline{\underline{\omega}} \wedge \underline{\underline{V}}$$

$\underline{\underline{a}} \quad \underline{\underline{r}} \quad \underline{\underline{t}} \quad \underline{\underline{r}}$

dove è da specificare nel caso attuale che $\underline{\underline{\omega}}$ è la velocità angolare della rotazione terrestre, di verso noto dall'ovest all'est e di intensità $7 \cdot 10^{-5}$. Ricordiamo che per definizione, alla superficie terrestre è

$$\underline{\underline{g}} = \underline{\underline{a}} - \underline{\underline{a}}$$

$\underline{\underline{a}} \quad \underline{\underline{t}}$

Noi vogliamo occuparci del moto relativo del punto P rapporto alla Terra, per cui P' e P'' saranno rispettivamente la velocità relativa e l'accelerazione relativa; in conseguenza

$$[1] \quad \underline{\underline{P''}} = \underline{\underline{g}} - 2 \underline{\underline{\omega}} \wedge \underline{\underline{P'}}$$

è l'equazione di questo moto relativo poichè a questa equazione si perviene ponendo nell'equazione di Coriolis

$$\begin{aligned} \underline{\underline{a}} - \underline{\underline{a}} &= \underline{\underline{g}} \\ \underline{\underline{V}} &= \underline{\underline{P'}} \\ \underline{\underline{a}} &= \underline{\underline{P''}} \end{aligned}$$

$\underline{\underline{r}} \quad \underline{\underline{r}}$

Supponendo $\underline{\underline{\omega}}$ e $\underline{\underline{g}}$ costanti, si ha, integrando la [1]

$$\underline{\underline{P'}} = \underline{\underline{v_0}} + \underline{\underline{gt}} - 2 \underline{\underline{\omega}} \wedge (\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{P_0}})$$

la quale sostituita nella [1] dà

$$[2] \quad \underline{\underline{P''}} = \underline{\underline{g}} - 2 \underline{\underline{\omega}} \wedge [\underline{\underline{v_0}} + \underline{\underline{gt}} - 2 \underline{\underline{\omega}} \wedge (\underline{\underline{P}} - \underline{\underline{P_0}})]$$

Se in questa equazione si trascura $\underline{\underline{\omega}}^2$, si può scrivere

$$[3] \quad \underline{\underline{P''}} = \underline{\underline{g}} - 2 \underline{\underline{\omega}} \wedge (\underline{\underline{v_0}} + \underline{\underline{gt}})$$

ed integrando successivamente

$$\underline{\underline{P'}} = \underline{\underline{v_0}} + \underline{\underline{gt}} - 2 \underline{\underline{\omega}} \wedge \underline{\underline{v_0}} t - \underline{\underline{\omega}} \wedge \underline{\underline{gt}}^2$$

$$[4] \quad \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P_0}} + \underline{\underline{v_0}} t + \frac{1}{2} \underline{\underline{gt}}^2 + \underline{\underline{v_0}} t^2 \wedge \underline{\underline{\omega}} + \frac{1}{3} \underline{\underline{gt}}^3 \wedge \underline{\underline{\omega}}$$

I primi tre termini del secondo membro danno la nota parabola, gli ultimi due — che contengono $\underline{\underline{\omega}}$ — appunto per questo sono l'effetto della ro-

tazione terrestre. Il verso di $\frac{1}{3} \underline{g} t^3 \wedge \underline{\omega}$ rimane definito ed è diretto ad E . Vi è una deriva costantemente verso E dell'entità specificata. L'altro effetto perturbante $\underline{v}_0 t^2 \wedge \underline{\omega}$ non può avere un'orientazione fissa dipendendo da $\underline{v}_0$, tuttavia è assai regolare. Infatti l'effetto stesso si verifica nel semipiano per $\underline{\omega}$ ruotato

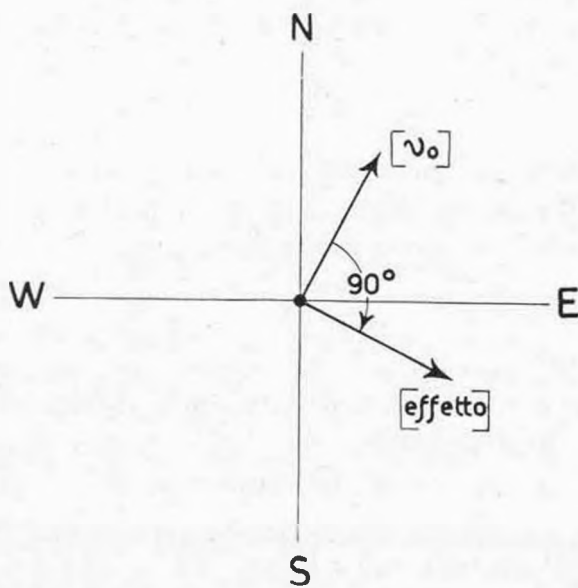


Fig. 2.

di 90°, con verso dal Nord all'Est, rispetto al semipiano dello stesso fascio che contiene $\underline{v}_0$. Ciò vale nell'emisfero Nord; nell'emisfero Sud vi è un risultato analogo con la differenza del verso che diventa l'opposto. (Ved. fig. 2).

4. - Per tener conto anche dei termini in ω^2 bisogna integrare la [2] sostituendovi la parte finita della soluzione [4]

$$P = P_0 + \underline{v}_0 t + \frac{1}{2} \underline{g} t^2$$

Si trascureranno questa volta i termini in ω^3 .

La [2] diventa

$$[2'] \quad P'' = \underline{g} + \left[\underline{v}_0 + \underline{g} t - 2 \underline{\omega} \wedge \left(\underline{v}_0 t + \frac{1}{2} \underline{g} t^2 \right) \right] \wedge 2 \underline{\omega}$$

e dà luogo alle successive integrazioni:

$$P' = \underline{v}_0 + \underline{g} t + \left[\underline{v}_0 t + \frac{1}{2} \underline{g} t^2 - 2 \underline{\omega} \wedge \left(\frac{1}{2} \underline{v}_0 t^2 + \frac{1}{6} \underline{g} t^3 \right) \right] \wedge 2 \underline{\omega}$$

$$[4'] \quad P = P_0 + \underline{v_0}t + \frac{1}{2} \underline{g}t^2 + \underline{v_0}t^2 \wedge \underline{\omega} + \frac{1}{3} \underline{g}t^3 \wedge \underline{\omega} - \frac{2}{3} \left[\underline{\omega} \wedge \underline{v_0}t^3 \right] \wedge \underline{\omega} - \frac{1}{6} \left[\underline{\omega} \wedge \underline{g}t^4 \right] \wedge \underline{\omega}$$

Quest'ultima è l'equazione della traiettoria a meno di termini dell'ordine di ω^3 . I vettori rappresentati dagli ultimi due termini, in ω^2 , non sono prati-

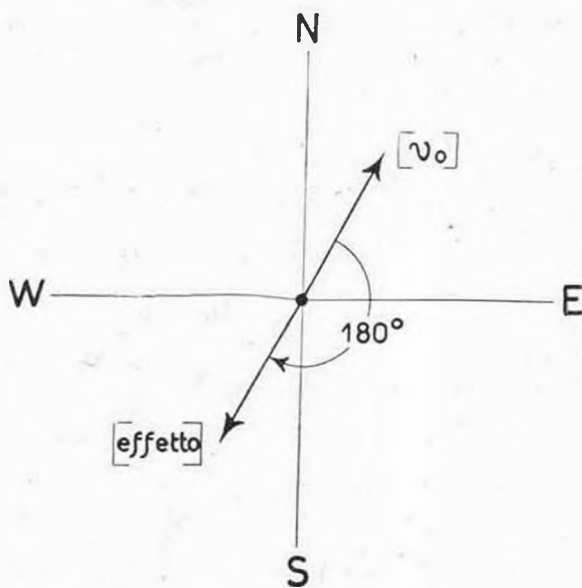


Fig. 3.

camente sensibili alle comuni distanze; l'ultimo dei due ha il versore della forza centrifuga, il penultimo giace nel semipiano per ω che contiene l'opposto di v_0 . (Ved. fig. 3).

Ma ritorniamo alla soluzione [4] senza i termini in ω^2 e scriviamone le equazioni cartesiane riferendosi ad un sistema ortogonale con origine nel centro della bocca da fuoco alla latitudine φ , ed orientato secondo l'Est (x), il Nord (y), lo Zenit (z). Per precedere il lettore nei calcoli riportiamo le componenti dei vari vettori ammesse e dedotte

	P	$\underline{v_0}$	$\underline{g}$	$\underline{\omega}$	$\underline{g} \wedge \underline{\omega}$
Est . . . , .	x	v_x	0	0	$g \omega \cos \varphi$
Nord	y	v_y	0	$\omega \cos \varphi$	0
Zenit	z	v_z	$-g$	$\omega \sin \varphi$	0

	$\underline{v_0} \wedge \underline{\omega}$
Est . . .	$\omega v_y \text{ sen } \varphi - \omega v_z \text{ cos } \varphi$
Nord . . .	$-\omega v_x \text{ sen } \varphi$
Zenit . . .	$\omega v_x \text{ cos } \varphi$

e quindi le equazioni cartesiane della [4]:

$$\begin{aligned}
 x &= v_x t & + \omega t^2 (v_y \text{ sen } \varphi - v_z \text{ cos } \varphi) + \frac{1}{3} \omega g t^3 \text{ cos } \varphi \\
 y &= v_y t & - \omega t^2 v_x \text{ sen } \varphi \\
 z &= v_z t - \frac{1}{2} g t^2 + \omega t^2 v_x \text{ cos } \varphi
 \end{aligned}
 \quad [5]$$

E' opportuno riportare anche a parte i termini in ω

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= + \omega t^2 (v_y \text{ sen } \varphi - v_z \text{ cos } \varphi) + \frac{1}{3} \omega g t^3 \text{ cos } \varphi \\
 \Delta y &= - \omega t^2 v_x \text{ sen } \varphi \\
 \Delta z &= + \omega t^2 v_x \text{ cos } \varphi .
 \end{aligned}
 \quad [V]$$

I termini in ω sono le deviazioni Δx , Δy , Δz dalla traiettoria parabolica al tempo t . Le deviazioni del punto di caduta si hanno calcolando le Δ per il tempo $T^* = \frac{2v_z}{g}$ che è, appunto, il tempo del punto di caduta.

L'ordine di grandezza di una Δ si ha facilmente con opportune posizioni:

$$\begin{aligned}
 v_x = v_z = 2000 \text{ m/sec}; \quad v_y = 0 \quad \varphi = 45^\circ \text{ risulta } T = 250^s \text{ e} \\
 \Delta y = 6200 \text{ m} \quad (X = 500 \text{ km})
 \end{aligned}$$

La terza delle [5] non dipende da v_z perchè l'effetto combinato di essa e di ω è orizzontale.

Naturalmente per altro punto della traiettoria le Δ sono da calcolarsi per il tempo corrispondente.

Sono riportate qui di seguito le espressioni cartesiane delle variazioni che hanno a fattore ω^2 , che per $X > 500 \text{ km}$ non sono trascurabili come può verificarsi con facili calcoli.

$$\begin{aligned}
 Dx &= - \frac{2}{3} \omega^2 t^3 v_x \\
 Dy &= \frac{2}{3} \omega^2 t^3 \text{ sen } \varphi (v_z \text{ cos } \varphi - v_y \text{ sen } \varphi) - \frac{1}{12} g \omega^2 t^4 \text{ sen } 2\varphi \\
 Dz &= \frac{2}{3} \omega^2 t^3 \text{ cos } \varphi (v_y \text{ sen } \varphi - v_z \text{ cos } \varphi) + \frac{1}{6} g \omega^2 t^4 \text{ cos }^2 \varphi
 \end{aligned}
 \quad [5']$$

Riportiamo il calcolo della sola parte Dv dipendente da t' per $X = 500$ km e $t = 250^s$.

Questo termine, nell'emisfero boreale, dà la deviazione verso il Sud di cui invano si è ricercato la conferma sperimentale. Nel caso attuale si ha un effetto di:

$$\frac{1}{12} 10.50.10^{-10}.40.10^8 = 17 \text{ m.}$$

5. - Δx e Δy danno in certo modo la misura dell'allontanamento dal piano di tiro del punto lungo la traiettoria (infatti se $v_y = 0$ il piano di tiro è quello xz). Ma è meglio fare un esame rigoroso di ciò e lo faremo relativamente al punto di arrivo. A questo proposito se indichiamo con α l'azimut del piano di tiro, con δx , δy le Δ corrispondenti al punto di arrivo, la variazione dell'azimut competente, espressa in millesimi, è

$$1000 \frac{\delta x \cos \alpha - \delta y \sin \alpha}{d}$$

d essendo la distanza orizzontale del punto di arrivo dall'origine.

6. - La durata della traiettoria, limitata al piano orizzontale per il centro della bocca da fuoco, è il tempo T non nullo che annulla la z delle [5]. Si ha

$$T = \frac{2v_z}{g - 2\omega v_x \cos \varphi}$$

e risulta praticamente uguale alla durata che si avrebbe in assenza della rotazione terrestre perchè si ottiene da quella imperturbata T^* aggiungendovi

$$T^* \frac{2\omega v_x \cos \varphi}{g}$$

7. - L'applicazione delle formule sopra riportate richiede la preparazione di alcuni dati quali la distanza e l'azimut del punto d'arrivo e la decomposizione della velocità iniziale secondo la terna utilizzata. La trattazione stessa inoltre, che è del tutto aderente alla traiettoria classica nel vuoto, richiede degli adattamenti per adeguarsi agli attuali teleproietti. Questi ultimi infatti descrivono nel vuoto una traiettoria costituita da due archi (il primo assai breve), l'uno prolungamento dell'altro, appartenenti a due curve distinte dello stesso piano (1). Le due curve sono di natura diversa perchè diverse sono, nelle due circostanze, le caratteristiche del moto. Lungo la prima curva infatti agisce anche un'altra forza che caratterizza appunto il teleproietto. Le due curve sono inoltre tangenti nel punto comune, dal quale comincia il moto

(1) F. GALANZINO: *Primo avviamento allo studio della balistica esterna dei proietti razzo*. — Roma, 1949.

parabolico con velocità iniziale uguale a quella finale del razzo. Per il fine che ci si prefigge giova considerare l'arco di parabola a completamento del secondo arco detto precedentemente — quello cioè che il proietto avrebbe descritto in luogo dell'arco percorso da razzo se non fosse stato dotato di autopropulsione, ed in guisa da raggiungere il punto di separazione dei due archi con la velocità vettoriale che è attribuito di quel punto — ed assumere da questo unico moto parabolico, in parte fittizio, le costanti necessarie delle formule [5]. Così, agli effetti del calcolo, non è da considerarsi il punto di lancio effettivo, bensì l'intersezione di minore ascissa della parabola con il piano orizzontale di lancio e, analogamente, in questo moto fittizio, è da assumersi per velocità iniziale la velocità che compete alla stessa origine fittizia detta sopra. In definitiva e per sommi capi le operazioni sono le seguenti:

- calcolo della traiettoria del razzo;
- sostituzione dell'arco percorso dal razzo con il complementare del secondo arco parabolico;
- determinazione del punto di lancio fittizio, della velocità iniziale fittizia e della durata fittizia;
- calcolo dell'azimut del punto di arrivo riferito al punto di lancio fittizio;
- calcolo delle componenti della velocità iniziale fittizia secondo il sistema cartesiano stabilito con origine nel punto di lancio fittizio;
- calcolo di Δx , Δy , Δz ;
- calcolo delle variazioni dedotte riferendosi finalmente al punto di lancio effettivo.

PROBLEMI E FORMULE DI GEODESIA TEORETICA.

8. - L'integrazione dell'equazione della traiettoria è stata condotta negli articoli precedenti supponendo costante la g . La trattazione diventa di gran lunga più complessa se la g è variabile, ed è necessario inoltre rifarsi da alcuni principi di Geodesia che valgono a rendere agevole e rigorosa la trattazione.

Diciamo subito che se un punto pesante viene lanciato dalla Terra, riesce assoggettato al campo determinato dal potenziale della gravità; ed ammesso, secondo il recente punto di vista (1), che l'ellissoide terrestre tratto dalle misure geometriche ed opportunamente situato sia anche una superficie equipotenziale del campo detto sopra, nelle immediate vicinanze di questo ellissoide il campo è normale ad esso. In un punto esterno all'ellissoide, in alto diciamo brevemente, il campo sarà normale alla superficie equipotenziale

(1) SOMIGLIANA: *Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione*. — Mem. Soc. Astr. It., 1929.

che vi passa, ma non è da pensarsi che elevandosi e descrivendo a ritroso la linea di forza, l'elemento di questa si conservi parallelo alla normale ellissoidica di quota zero; per semplicità tuttavia supporremo che ciò sia, perchè è conforme alla precisione che si persegue nello studio attuale dei teleproietti. E vale la pena di indugiarsi alquanto sull'argomento.

Il punto di partenza è la formula di Bruns del campo esterno al geoide

$$[6] \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2\omega^2 + g \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right);$$

per il campo interno (1) vi è anche un altro termine cui è dovuta la discontinuità di $\frac{\partial g}{\partial z}$. Questa formula esprime la derivata della gravità secondo la verticale del posto mediante la velocità angolare ω ed i due raggi principali di curvatura della superficie di livello passante per il punto considerato. In base alla nostra ipotesi, secondo la quale l'ellissoide terrestre, situato opportunamente, è la superficie di livello di quota zero, i due raggi di curvatura si identificano rispettivamente con i due raggi principali dell'ellissoide, ρ ed N , che hanno valori noti fissato che sia l'ellissoide di riferimento ed il punto su di esso. Lo studio della geometria dell'ellissoide di rotazione fornisce di essi le seguenti espressioni variabili con la latitudine (2)

$$[7] \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}; \quad N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

e quanto alle costanti si ha per l'ellissoide internazionale:

$$a = 6378388 \text{ m} \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 7.10^{-3}$$

La linea di forza del campo di gravità, è una curva di cui la prima curvatura si esprime lungo di essa con la formula (3)

$$[8] \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{g} \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2}$$

Consideriamo R nel punto in cui la curva taglia l'ellissoide equipotenziiale (4). Per il modo in cui è ottenuta la [8], gli assi x ed y sono ortogonali tra loro e tangenti all'ellissoide nel punto interessato, ma non è precisata l'orientazione di essi; orientiamoli perciò in guisa che l'asse x risulti tangente

(1) Vedasi ad es.: PIZZETTI: *Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti*. — Pisa, Spoerri, 1913 (pag. 24); HOPFNER: *Physikalische Geodäsie*. — Leipzig, Ak. Verl., 1933, pag. 324.

(2) PIZZETTI: *Geodesia teoretica*, paragrafi 11 e 23.

(3) PIZZETTI: *Principi ecc.*, pag. 23.

(4) Le derivate seconde e terze del potenziale — discontinue alla superficie ellissoidica — verranno considerate su questa ed all'esterno.

alla sezione meridiana ed y nel primo verticale; ciò fatto risulterà $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ perchè g non varia lungo il parallelo e si avrà per la curvatura della linea di forza:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x}$$

Supponendo poi che l'asse x , tangente all'ellisse meridiana, sia rivolto verso nord, ed indicando con ρ il raggio di curvatura del meridiano si ha:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \varphi}$$

Basta quindi esprimere g mediante φ , cioè richiamare l'equazione (semplificata)

$$[9] \quad g = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi) \quad (1)$$

(IX) $\beta = 5,3 \cdot 10^{-3}$; $g_0 = 978,049$ (gravità all'equatore),
per concludere che

$$R = \frac{g}{g_0 \beta \sin 2\varphi}$$

Con facili calcoli si ottiene che a 45° di latitudine il raggio di curvatura della linea di forza della gravità terrestre è, secondo le ipotesi e deduzioni fatte, 200 volte il raggio di curvatura del meridiano e però la sua lunghezza è di km 1.273.200.

Si tratta di un raggio di curvatura enorme che giustificherà le ipotesi semplificatrici che porremo in seguito. Tuttavia è opportuno studiare anche la variazione con l'altezza di questo raggio di curvatura, variazione che limiteremo al primo ordine.

Deriviamo perciò la [8] dopo averla risolta rispetto ad R .

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - g \left[\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} \right).$$

Essendo poi $\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_0 = 0$, l'espressione si semplifica così per $z = 0$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial x}} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{1}{\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^3} g \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z}$$

dove tutte le derivate sono da intendersi per $z = 0$.

(1) CASSINIS: *Sur l'adoption d'une formule internationale...* — Bull. Géodésique, 1930.

CASSINIS: *Table des valeurs de la pesanteur normale internationale*, in Bull. Géod., 1931, riporta la formula ed i valori recentemente adottati comprendendovi anche un secondo termine. Non è aggiornata l'altra di HELMERT: *Die Math. u. phys. Theorien der höheren Geodäsie*, II, pag. 241. Cfr. anche JORDAN - EGGERT: *Hand. d. Vermessungskunde*, III, 2°, 1941, pag. 392 e segg.

Ora si tratta di eseguire le varie derivazioni, tenendo conto ove occorre delle [7]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + g \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_2} \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = -\frac{3}{2} \frac{e^2 \sin 2\varphi}{\rho^2 (1 - e^2 \sin^2 \varphi)} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{N} \right) = -\frac{1}{\rho N^2} \frac{\partial N}{\partial \varphi} = -\frac{e^2 \sin 2\varphi}{2\rho N (1 - e^2 \sin^2 \varphi)} \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= \frac{\rho}{\beta g_0 \sin 2\varphi} \left[2\omega^2 + g \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{N} \right) \right] - \frac{g\rho^2}{\beta^2 g_0^2 \sin^2 2\varphi} \left[\frac{g_0 \beta \sin 2\varphi}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{N} \right) - \right. \\ &\quad \left. - g \frac{e^2 \sin 2\varphi}{2\rho (1 - e^2 \sin^2 \varphi)} \left(\frac{3}{\rho} + \frac{1}{N} \right) \right]\end{aligned}$$

e finalmente

$$[10] \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2\rho\omega^2}{\beta g_0 \sin 2\varphi} + \frac{g^2 \rho e^2}{2g_0^2 \beta \sin 2\varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi)} \left(\frac{3}{\rho} + \frac{1}{N} \right).$$

Con facile calcolo risulta che quest'ultima derivata per $z = 0$ assume il valore numerico + 500. Essendo l'asse z della formula [6] rivolto secondo la normale interna, per il valore di R , ad una distanza di 100 km dalla superficie equipotenziale ellissoidica verso l'esterno, si ha:

$$R_z = R_0 - 100 \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_0 = R_0 - 50.000 \text{ km.}$$

Dunque ad un'altezza di 100 km il raggio di curvatura della linea di forza ha l'ordine di grandezza di 1.223.000 km. In definitiva nel campo entro il quale vogliamo limitare la nostra ricerca (100 km di altezza) il raggio di curvatura della linea di forza supera un milione di chilometri e perciò la tangente all'estremo alto dell'arco così delimitato di essa forma con la tangente all'estremo basso un angolo di 20 secondi. In conseguenza la tangente all'estremo alto taglia l'ellissoide a 10 metri dal punto da cui si spicca la linea di forza. Come si vede, almeno per questa particolare bisogna, si potrebbe raggiungere una quota maggiore di 100 km pur rimanendo, come vedremo, largamente nei limiti consentiti dall'approssimazione propostaci.

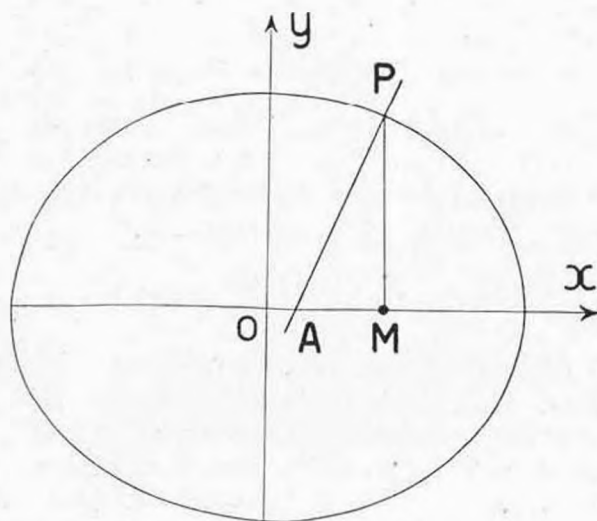
9. - Ma pur ammettendo che per una certa profondità il campo sia normale all'ellissoide di quota zero E_0 , c'è da chiedersi se il punto pesante lanciato da un punto P di E_0 rimanga costantemente nel piano di lancio π individuato dalla normale ad E_0 per P e dalla velocità iniziale, ed, al caso, di quanto se ne scosta. Dimosteremo, nell'ipotesi detta sopra del campo nor-

male all'ellissoide di quota zero, che lo scostamento del punto dal piano π è praticamente trascurabile — ai fini balistici — alle quote che a noi interessa considerare.

Consideriamo perciò il piano per la normale in P all'ellissoide E_0 , contenente il punto Q anch'esso di E_0 . Siano $P = (\varphi_1, 0)$; $Q = (\varphi_2, \lambda_2)$ le coordinate geografiche di P e Q per i quali si hanno poi, ponendo $W_1 = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}$, le seguenti coordinate cartesiane ortogonali riferite a due assi equatoriali x ed y ed all'asse di rotazione z (1).

$$\begin{array}{lll} P) & \frac{a \cos \varphi_1}{W_1} & O \quad \frac{a(1-e^2) \sin \varphi_1}{W_1} \\ Q) & \frac{a \cos \varphi_2}{W_2} \cos \lambda_2 & \frac{a \cos \varphi_2}{W_2} \sin \lambda_2 \quad \frac{a(1-e^2) \sin \varphi_2}{W_2} \end{array}$$

Un terzo punto per il quale passa il nostro piano normale è dato dall'intersezione della normale all'ellisse meridiana in P col semiasse maggiore di



$$OM = x; \quad OA = e^2 x$$

Fig. 4.

questa. Questo punto ausiliario A , per nozioni note delle coniche, ha l'ascissa $e^2 x$, se x è l'ascissa del punto P ; perciò trasportandosi alla geometria dell'ellissoide, il punto A avrà le coordinate

$$A) \quad \frac{ea}{W_1} \cos \varphi_1 \quad O \quad O$$

(1) PIZZETTI: *Geodesia teoretica*, paragrafo 12.

Ed ecco l'equazione del piano che passa per i punti P, Q, A , cioè del piano normale all'ellissoide in P passante per Q :

$$[11] \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \frac{a}{W_1} \cos \varphi_1 & 0 & \frac{a(1-e^2)}{W_1} \sin \varphi_1 & 1 \\ \frac{a e^2}{W_1} \cos \varphi_1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{a}{W_2} \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 & \frac{a}{W_2} \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 & \frac{a(1-e^2)}{W_2} \sin \varphi_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e sviluppando

$$\begin{aligned} & \frac{1}{W_1 W_2} a^2 (1-e^2) \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 x + \\ & + \left[\frac{a^2 e^2}{W_1} (1-e^2) \left(\frac{\sin \varphi_1}{W_1} - \frac{\sin \varphi_2}{W_2} \right) + \frac{a^2}{W_1 W_2} (1-e^2) (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda_2) \right] y \\ & - \frac{a^2}{W_1 W_2} (1-e^2) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 z + \text{noto} = 0 \end{aligned}$$

Scriviamo per semplicità questa equazione nuovamente, così:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$$

e, tenendo presente che interessa l'angolo ϑ che la normale all'ellissoide condotta per Q fa con questo piano, normale i cui coseni direttori sono

$$\cos \varphi_2 \cos \lambda_2 \quad \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 \quad \sin \varphi_2,$$

risulta

$$\sin \vartheta = \frac{\alpha \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 + \beta \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 + \gamma \sin \varphi_2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

Nel caso nostro si ha

$$[12] \quad \sin \vartheta = \frac{e^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_2 \sin \lambda_2}{\sqrt{\cos^2 \varphi_2 \sin^2 \lambda_2 + \sin^2 (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon}}$$

dove ε è una quantità dipendente da e^2 .

Esecuendo i calcoli numerici relativi, ϑ risulta di un millesimo per distanze di 1000 km. Perciò, alle distanze a cui noi ci limiteremo, la normale all'ellissoide lungo una sezione normale di questo per P forma un angolo col piano stesso che non supera il millesimo; il punto di questa normale, a quota + 100 km disterà dal piano stesso 100 m. Invertendo poi le operazioni,

invocando la continuità si deduce che la normale all'ellissoide condotta da un punto del piano normale in P avente quota di 100 km ed ascissa inferiore a 1000 km taglia l'ellissoide a 100 m circa dalla sezione normale; e si conclude in definitiva che la traiettoria può considerarsi giacente nel piano della sezione normale, cioè nel piano di lancio.

10. - Le condizioni di favore considerate finora sono suffragate anche dagli sviluppi di Weingarten di cui vogliamo qui trattare.

Riferiamoci al sistema cartesiano ortogonale locale x (Est), y (Nord), z (Zenit) per un punto O dell'ellissoide, sistema che abbiamo già impiegato trattando della rotazione terrestre. Si spicchi da O , sull'ellissoide, la geodetica di azimuth α della quale diremo s l'arco contato da O . Valgono per questa geodetica le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
 x &= s \operatorname{sen} \alpha \left[1 - \frac{s^2}{6NR\alpha} + \frac{s^3 e^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{6(1-e^2)N^2R\alpha} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \dots \right] \\
 [13] \quad y &= s \cos \alpha \left[1 - \frac{s^2}{6\rho R\alpha} + \frac{s^3 e^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{6(1-e^2)\rho R\alpha} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left(\frac{9 \cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{N} \right) + \dots \right] \\
 z &= -s \left[\frac{s}{2R\alpha} - \frac{s^2 e^2 \operatorname{sen} 2\varphi \cos \alpha}{4(1-e^2)NR\alpha} - \dots \right]
 \end{aligned}$$

in cui ρ , N ed R_α sono ordinatamente i raggi di curvatura principale dell'ellissoide in O ed il raggio di curvatura della sezione normale di azimuth α pure in O ; ed $e^2 = 7 \cdot 10^{-3}$.

Sono questi i celebri sviluppi di Puiseux-Weingarten che, come si vede, danno le coordinate di un punto della geodetica spiccata con azimuth α sull'ellissoide di rotazione. In base a questi sviluppi si dimostra che, trascurando il 3° ordine, la superficie ellissoidica attorno ad O s'identifica con la sfera di raggio $\sqrt{\rho N}$; da cui la semplificazione dei problemi da ellissoidici a sferici nel campo di lecita applicazione. Per la precisione del milionesimo (10^{-6}), che si suol raggiungere in geodesia, questo campo è di 150 km circa, ma diventa ben più grande se non è richiesta la succitata precisione. Vale la pena di prendere in esame questo argomento.

Considerando come abbiamo fatto $\alpha = \text{costante}$, si hanno le geodetiche della superficie, se invece si suppone costante la s e variabile α , si hanno i cerchi geodetici, con una dizione che è significativa di per sè. Sono così istituite sulla superficie le coordinate polari geodetiche analoghe alle coordinate polari del piano; e gli sviluppi di Weingarten, da questo punto di vista riguardati, danno le equazioni parametriche dell'ellissoide di rotazione.

Per il motivo che vedremo occupiamoci della superficie S le cui equazioni si ottengono dalle [13] arrestando le prime due al secondo termine incluso e la terza al solo primo termine. Naturalmente la S non è più l'ellissoide

da cui siamo partiti. D'altro canto gli ultimi termini scritti in parentesi delle [13] risultano tutti minori di 10^{-3} per $s < 4000$ km come risulta imponendo la condizione $\frac{e^2 s^2}{4R^2} < 10^{-3}$ per cui, quando si possa tollerare l'errore di un millesimo della distanza è superfluo tener conto di quei termini pur trattando l'ellissoide.

Raccogliendo quanto abbiamo detto, è da concludersi che i risultati dei calcoli relativi all'ellissoide sino alla distanza di 4000 km con la precisione del millesimo s'identificano con i risultati dei calcoli relativi alla superficie S.

11. - Si tratta di studiare la natura di questa superficie. Intanto una sfera, che è un particolare ellissoide di rotazione, sarà rappresentata dalle stesse equazioni [13] pur di particolarizzarle; ponendo cioè:

$$e^2 = 0 \quad R_1 = R_2 = R_\alpha = R$$

Perciò le equazioni [13], limitate ai secondi termini per le prime due, ed al primo termine per la terza, rappresentano la sfera di raggio $\sqrt{\rho N}$ (tangente all'ellissoide in O) se con approssimazione tollerabile secondo i nostri presupposti, sarà possibile sostituire ρ , N ed R_α con $\sqrt{\rho N}$. In tali circostanze la geometria dell'ellissoide si riduce alla geometria della superficie S e successivamente della sfera di raggio $\sqrt{\rho N}$ entro i limiti nei quali si ritengono trascurabili i termini non considerati.

Per operare la sostituzione detta precedentemente calcoliamo la differenza tra R_2 ed R_1 , cioè tra N e ρ che sono i raggi principali di curvatura dell'ellissoide nel punto:

$$N - \rho = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} - \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Risulta

$$N - \rho = \frac{e^2}{1 - e^2} \rho \cos^2 \varphi = 7 \varepsilon 10^{-3}$$

con $\varepsilon < 1$.

Tale essendo la differenza tra N e ρ , sarà anche minore l'una o l'altra delle differenze $N - R_\alpha$, $R_\alpha - \rho$ giacchè N e ρ sono il massimo e minimo raggio di curvatura delle sezioni normali pel punto. Ciò posto occupiamoci del termine $\frac{s}{2R_\alpha}$ dell'ultima della [13] il quale, essendo di prim'ordine — nelle altre due equazioni si tratta di termini del secondo ordine — risentirà una variazione maggiore in seguito alla sostituzione di R_α con $\sqrt{\rho N}$ che intendiamo fare, e calcoliamo questa variazione. Essendo per quanto s'è detto

$$N = \rho (1 + 7 \varepsilon 10^{-3})$$

$$R_\alpha = \rho (1 + 7 \varepsilon' 10^{-3})$$

$$\varepsilon' < \varepsilon$$

si ottiene successivamente

$$\sqrt{\rho N} = \rho \left(1 + \frac{7}{2} \varepsilon 10^{-3} \right)$$

$$\frac{s}{2R\alpha} - \frac{s}{2\sqrt{\rho N}} = -\frac{7}{4} \frac{s}{\rho} \varepsilon 10^{-3}.$$

Per conseguire la precisione già prefissata è lecito sostituire R_α con $\sqrt{\rho N}$ e analogamente R_1 con ρN quando sia

$$\frac{7}{4} \frac{s}{\rho} 10^{-3} < 10^{-3}$$

cioè quando

$$s < 3600 \text{ Km}.$$

Chiameremo campo del teleproietto un campo siffatto per ricordarne la genesi, per quanto nella presente ricerca ci si attenga ad un campo alquanto minore.

DIGRESSIONE SULLA PRECISIONE.

12. - Riferiamo ad un sistema cartesiano ortogonale (x orizzontale, y verticale verso l'alto) la traiettoria parabolica d'un punto pesante lanciato nel vuoto. E' noto che le equazioni in prima approssimazione di quella sono:

$$x = vt$$

$$y = ut - \frac{1}{2} gt^2$$

Ricordiamo che chiamasi durata della traiettoria il tempo T non nullo che annulla la y , e che a calcoli fatti risulta

$$T = \frac{2u}{g};$$

ricordiamo inoltre che la gittata, X , distanza del punto di caduta dal punto di lancio è

$$X = \frac{2uv}{g}$$

Calcoliamo ora la variazione di X per una variazione sistematica Δg della gravità:

$$\Delta X = -\frac{2uv}{g} \frac{\Delta g}{g},$$

cioè

[14]

$$\frac{\Delta X}{X} = -\frac{\Delta g}{g}$$

Dunque la variazione percentuale della gittata X uguaglia la variazione percentuale della g e però un errore Δg nella valutazione di g dà un errore ΔX nella valutazione di X legato al primo della relazione [14]. Particolarizzando, se viene trascurato un millesimo di g , viene altresì trascurato un millesimo di X . Viceversa se si può trascurare un millesimo di X ; ad es. 1 km su 1000 km, può trascurarsi sistematicamente un millesimo di g . E' evidente poi che $\frac{X}{1000}$ rappresenterebbe il limite superiore dell'errore di X se l'errore di g avesse per limite superiore $\frac{g}{1000}$; vale a dire non si raggiungerebbe l'errore $\frac{X}{1000}$ se l'errore di g fosse variabile lungo la traiettoria, ma sempre inferiore a $\frac{g}{1000}$.

Calcoliamo subito l'ordine di grandezza di questo limite superiore. Poniamo $g = 9,81 \frac{m}{sec^2}$ oppure $981 \frac{cm}{sec^2}$. Così scrivendo si suol dire 981 gal, derivando dal nome di Galileo l'unità di questa particolare accelerazione (C.G.S.). Si suol parlare anche di milligal, ed in tal caso si scrive 981.000 milligal; perciò $\frac{g}{1000}$ nel caso nostro vale 981 milligal ed in cifra tonda 1000 milligal.

Si supponga ora che la trattazione dei nostri problemi esiga la considerazione di termini cosiffatti:

$$g \left(1 + \frac{x^2}{R^2} + \frac{xy}{R^2} + \frac{x^3}{R^3} + \frac{y^3}{R^3} + \dots \right);$$

dove R è il raggio terrestre e x ed y sono le coordinate di un punto della traiettoria; si pongano le limitazioni

$$x < 1000 \text{ Km} \quad ; \quad y < 100 \text{ Km}$$

e sia noto $R = 6400 \text{ km}$. Risulta chiaro da quanto s'è detto che $\frac{x^3}{R^3}$ non può essere trascurato; ma che può trascurarsi $\frac{y^3}{R^3}$ ed altresì $\frac{y^2}{R^2}$ e $\frac{x^4}{R^4}$ ove ci siano, e così via, perchè i contributi di questi termini sono minori di 10^{-3} .

Nelle formule dunque scriveremo al più le terze potenze di $\frac{x}{R}$ e decideremo volta a volta per quanto concerne le potenze inferiori alla terza di $\frac{y}{R}$ e di altri rapporti che incontreremo.

Le considerazioni precedenti — che si fondano sulla variazione della X (gittata) e non sulla variazione delle coordinate del punto generico della traiettoria — potrebbero, a ragione, non sembrare del tutto esaurienti. Poichè, d'altro canto, lo studio generale della precisione si presenta alquanto riposto, ci limiteremo al risultato ottenuto invocando l'importante ruolo che presenta la X ed avvertendo che per $x < 1000 \text{ km}$ i termini trascurati

$\left(\frac{x}{R}\right)^4 \dots$ non raggiungono $5 \cdot 10^{-4}$.

LA GRAVITÀ LUNGO LA TRAIETTORIA.

13. - Consideriamo l'ellissoide terrestre e per la gravità (a quota zero) funzione della latitudine valga la formula

$$g_{\psi} = g_0 (1 + \beta \sin^2 \psi) \quad \beta = 0,0053$$

dove ψ è la latitudine corrente e g_0 è la gravità all'equatore. Conviene esprimere la gravità g_{ψ} mediante la gravità g_{φ} in un punto prossimo, sempre a quota zero, di latitudine φ , il che si ottiene facilmente ricorrendo allo sviluppo di Taylor limitato al primo termine

$$g_{\psi} = g_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi) + (\psi - \varphi) \beta g_0 \sin 2\varphi$$

cioè, ponendo $\psi - \varphi = \Delta\varphi$:

$$g_{\psi} = g_{\varphi} + g_{\varphi} \beta \frac{g_0}{g_{\varphi}} \sin 2\varphi \Delta\varphi.$$

Ora, ricordando la formula della geometria ellissoidica (e della superficie di rotazione in genere):

$$\rho \Delta\varphi = \Delta s \cos \alpha$$

la quale esprime che la proiezione sul meridiano di un arco infinitesimo dell'ellissoide spiccato con azimut α è $\rho \Delta\varphi$, dove ρ è il raggio di curvatura del meridiano, possiamo scrivere, dopo aver sostituito $\frac{\Delta s}{\rho}$ con $\frac{x}{R}$:

$$g_{\psi} = g_{\varphi} \left(1 + \beta \frac{g_0}{g_{\varphi}} \sin 2\varphi \cos \alpha \frac{x}{R} \right).$$

Supposto che il proietto venga lanciato dal punto $(\varphi, \lambda = 0)$, $\frac{g_0}{g_{\varphi}} \sin 2\varphi$ è attribuito del punto di lancio come g_{φ} , x cambia con la distanza, α con l'orientazione del piano di tiro. Perciò si può scrivere, ponendo $\beta \frac{g_0}{g_{\varphi}} \sin 2\varphi \cos \alpha = k$:

$$(15\psi) \quad g_{\psi} = g_{\varphi} \left(1 + k \frac{x}{R} \right)$$

dove, essendo

$$-0,005 \leq k \leq 0,005$$

ed $\frac{x}{R}$ del primo ordine, $k \frac{x}{R}$ è da ritenersi del terzo ordine. Questa formula dà la gravità lungo l'intersezione del piano di tiro con l'ellissoide mediante la gravità nel punto di lancio (a quota zero) e l'ascissa x del punto di arrivo.

14. - Si tratta ora di tener conto della variazione della gravità con l'altezza. Di consueto la gravità g_h a quota h si ottiene dalla gravità g_0 a quota zero e sulla stessa verticale mediante la formula

$$g_h = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

dove R il raggio terrestre. Questa formula si deduce da un ragionamento molto semplice considerando la legge di gravitazione e trascurando dei termini di ordine superiore nella formula direttamente ottenuta. Per il caso della traiettoria del teleproietto vale ugualmente questa formula e difatti così l'applicheremo; ma giova derivarla in altro modo per mostrare che la semplificazione introdotta è lecita anche nel caso del teleproietto per il quale vengono interessate quote di 100 km e più.

Il punto di partenza è la formula di Bruns:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2\omega^2 + g \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

già considerata al n. 8. Per lo sviluppo di Taylor limitato al primo termine si ha

$$g_h = g_0 - h \left[g_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + 2\omega^2 \right];$$

con il segno negativo per il verso di z della formula di Bruns. Se i due raggi scritti precedentemente uguagliano il raggio della sfera locale, il termine interessato diventa $\frac{2gh}{R}$ da cui il contributo $-\frac{2gh}{R}$ per la variazione della gravità. Ciò posto, scriviamo la formula precedente nella seguente maniera

$$g_h = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R} - \frac{2\omega^2 h}{g_0} \right)$$

e mostriamo che l'ultimo termine è trascurabile. Infatti assumendo

$$\omega^2 = 50 \cdot 10^{-10}; \quad g_0 = 10; \quad h = 100 \cdot 10^3 \text{ m}$$

quel termine vale 10^{-4} . Perciò anche per il teleproietto che non superi la quota di 100 km è trascurabile il termine in ω^2 nella correzione della g per l'altezza.

15. - Si passa così al calcolo della gravità con l'altezza. Riferendosi ad un sistema cartesiano ortogonale giacente sul piano di tiro (x orizzontale volto al punto di caduta, y verticale volto verso l'alto, ed origine nel punto di lancio), siano x ed y le coordinate d'un punto della traiettoria. Ritenendo poi sferica e di raggio R la superficie terrestre, la distanza r_i dalla sfera del punto (x, y) è

$$r_i = \frac{y+R}{\cos \varepsilon} - R = y + \frac{\varepsilon^2}{2} (y+R)$$

Infatti dalla figura 5 risulta subito la prima espressione della distanza, ed alla seconda si perviene ponendo $\cos \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$ e, successivamente, $\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon^2}{2}} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}$, facendo cioè operazioni in cui è trascurato ε^4 . Se r è la quota del punto (x, y) , sarà $g(1 - \frac{2y}{R})$ la gravità in esso, e quest'ultima può

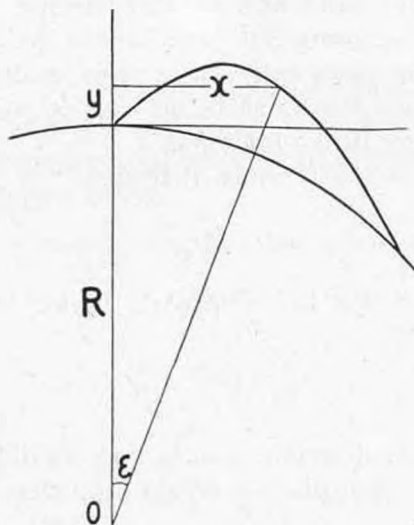


Fig. 5.

scriversi $g(1 - \frac{2y}{R} - \varepsilon^2)$ quando si applichi la seconda espressione di r e si trascuri $\frac{y}{R} \varepsilon^2$, com'è lecito. Per quanto concerne ε è da notare che dalla figura risulta subito $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{x}{R + y}$ e successivamente, trascurando com'è lecito il contributo di $\frac{y^2}{R^2}$, si ha

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{x}{R} \left(1 - \frac{y}{R}\right);$$

perciò si ha per l'arco

$$\varepsilon = \frac{x}{R} \left(1 - \frac{y}{R}\right) - \frac{x^3}{3R^3}$$

In definitiva detta g_ψ la gravità a quota zero sulla verticale di (x, y) , la gravità in (x, y) a quota r , conservando solo i termini di terzo ordine, risulta

$$g_\psi \left(1 - \frac{2y}{R} - \frac{x^2}{R^2} + \frac{2x^2 y}{R^3}\right)$$

e questa si riduce poi a

$$[15h] \quad g_{\psi} \left(1 - \frac{2y}{R} - \frac{x^2}{R^2} \right)$$

perchè $\frac{2x^2y}{R^3} < 10^{-3}$.

Ma per quanto abbiamo detto al n. 13 la g_{ψ} si esprime per la g_{φ} (gravità nel punto di lancio alla stessa quota) perciò in definitiva dalle formule [15] e [16] la gravità in (x, y) risulta

$$[16] \quad g_{\varphi} \left(1 - \frac{2y}{R} + k \frac{x}{R} - \frac{x^2}{R^2} \right)$$

e dipende dalla gravità nel punto di lancio e dalle coordinate x e y .

Questa accelerazione ha la direzione della verticale nel punto (x, y) e questa ha i coseni direttori nel piano di tiro $-\sin \varepsilon$, $-\cos \varepsilon$, cioè

$$-\frac{x}{R} \left(1 - \frac{y}{R} \right) + \frac{x^3}{3R^3}; \quad - \left(1 - \frac{x^2}{2R^2} \right);$$

perciò, in base all'approssimazione relativa del millesimo già detta, le due componenti secondo x ed y di questa accelerazione risultano

$$[17] \quad \ddot{x} = -g_{\varphi} \frac{x}{R} \left(1 - \frac{2y}{R} - \frac{4}{3} \frac{x^2}{R^2} \right)$$

$$[18] \quad \ddot{y} = -g_{\varphi} \left(1 - \frac{2y}{R} + k \frac{x}{R} - \frac{3}{2} \frac{x^2}{R^2} \right)$$

INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO.

16. - L'equazione rigorosa che domina l'argomento che andiamo trattando è la

$$[1] \quad P'' = g - 2 \omega \wedge P'$$

già considerata agli art. 3 e successivi, e là integrata supponendovi costante la g . A questa equazione dovremmo ritornare ed integrarla considerandovi gli attributi di g secondo la [16]; preferiamo tuttavia operare più semplicemente considerando già acquisiti i risultati della perturbazione dovuta alla rotazione terrestre, calcolati in base alla traiettoria parabolica (g costante v. art. 3 e segg.) e ritenendo che l'assenza di questa perturbazione non influenzi i risultati che si otterranno supponendo variabile la g .

Le [17] e [18] dell'art. 15 sono le equazioni che reggono il moto del punto pesante soggetto alla gravità terrestre. Dal modo seguito per ottenerle

risulta che esse si riferiscono all'ellissoide terrestre, perchè la sfera a cui si è fatto ricorso talvolta è una sfera di comodo che, nei limiti dell'approssimazione a cui ci si appone, è il legittimo sostituto dell'ellissoide. Perciò le considerazioni geometriche (distanze) e quelle meccaniche (campo gravitazionale) hanno per supporto l'ellissoide di rotazione terrestre.

17. - Scriviamo nuovamente le equazioni precedenti in maniera più comoda per il calcolo, sopprimendo l'unico indice φ , ponendo $\frac{2}{R} = \alpha$:

$$[17'] \quad \ddot{x} = -\frac{1}{2} g \alpha x \left(1 - \frac{3}{2} \alpha y - \frac{1}{3} \alpha^2 x^2 \right)$$

$$[18'] \quad \ddot{y} = -g \left(1 - \alpha y + \frac{1}{2} k \alpha x - \frac{3}{8} \alpha^2 x^2 \right)$$

Si tratta di un sistema di non facile integrazione, per cui giova ricorrere ad alcuni accorgimenti. Integreremo separatamente le due equazioni dopo avere espresso la x e la y della prima e la x della seconda mediante le funzioni di t competenti secondo il moto parabolico classico; vale a dire porremo $y = ut - \frac{1}{2} g t^2$ ed $x = vt$ nel secondo membro della [17'] e $x = vt$ nel secondo membro della [18'] perchè risulti più facile l'integrazione delle due equazioni. L'errore che così si commette rientra fra quelli già tollerati.

Integrando le sostituite delle equazioni [17'] e [18'] perverremo alle equazioni parametriche della traiettoria che indicheremo, per il momento, con

$$[19] \quad x = x(t)$$

$$[20] \quad y = y(t)$$

ebbene, poniamo il valore di t per cui si annulla la y della [20] nella x della [19], calcoliamo inoltre la $x = vt$ per cui si annulla la $y = ut - \frac{1}{2} g t^2$ cioè la X del moto parabolico classico: il Δx tra le due traiettorie (a quota zero) è la differenza tra i due valori di x così ottenuti.

Occupiamoci della [18'] trasformata come abbiamo detto

$$[XVIII] \quad \ddot{y} = -g \left(1 - \alpha y + \frac{1}{2} k \alpha vt - \frac{3}{8} \alpha^2 v^2 t^2 \right).$$

Si tratta di un'equazione differenziale del 2° ordine con secondo membro, il cui integrale generale — che è somma di un integrale particolare della medesima e dell'integrale generale dell'equazione omogenea — richiede appunto un integrale particolare. Poniamo per questo

$$y = L + Mt + Nt^2$$

Essendo per questo integrale particolare $\ddot{y} = 2N$, sarà

$$2N = -g \left(1 - \alpha L - \alpha M t - \alpha N t^2 + \frac{1}{2} k \alpha v t - \frac{3}{8} \alpha^2 v^2 t^2 \right),$$

e con facili calcoli si ottengono i valori dei coefficienti

$$L = -\frac{3}{4} \frac{v^2}{g} + \frac{1}{\alpha}$$

$$M = \frac{1}{2} k v$$

$$N = -\frac{3}{8} \alpha v^2$$

L'integrale particolare è quindi:

$$y = \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{4} \frac{v^2}{g} + \frac{1}{2} k v t - \frac{3}{8} \alpha v^2 t^2$$

e perciò l'integrale generale della [XVIII] è

$$[20'] \quad y = c_1 e^{\sqrt{\alpha g} t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha g} t} + \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{4} \frac{v^2}{g} + \frac{1}{2} k v t - \frac{3}{8} \alpha v^2 t^2$$

Le costanti di integrazione c_1 e c_2 si ottengono dalle condizioni iniziali $y(0) = 0$ $y'(0) = u$. Per il motivo che vedremo, tuttavia, non occorrono individualmente codeste costanti perchè bastano di esse la somma e la differenza, per cui da $y(0) = 0$ si ottiene subito:

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{4} \frac{v^2}{g};$$

e da $y'(0) = u$ in maniera ugualmente facile si ottiene

$$c_1 - c_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha g}} \left(u - \frac{1}{2} k v \right);$$

Per ragioni di comodo conviene esprimere l'integrale (20') mediante una forma polinomiale e si ottiene ciò ricorrendo ai noti sviluppi:

$$e^{\sqrt{\alpha g} t} = 1 + \sqrt{\alpha g} t + \frac{\alpha g}{2} t^2 + \frac{\alpha g}{6} \sqrt{\alpha g} t^3 + \dots$$

$$e^{-\sqrt{\alpha g} t} = 1 - \sqrt{\alpha g} t + \frac{\alpha g}{2} t^2 - \frac{\alpha g}{6} \sqrt{\alpha g} t^3 + \dots$$

in base ai quali si ha infatti:

$$[20''] \quad y = c_1 \left(1 + \sqrt{\alpha g} t + \frac{\alpha g}{2} t^2 + \dots \right) + c_2 \left(1 - \sqrt{\alpha g} t + \frac{\alpha g}{2} t^2 - \dots \right) + \\ + \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{4} \frac{v^2}{g} + \frac{1}{2} k v t - \frac{3}{8} \alpha v^2 t^2.$$

E' evidente così il motivo per cui occorrono $c_1 + c_2$, $c_1 - c_2$ e non le costanti individualmente.

Secondo la traiettoria classica il proiettile è a quota zero (una seconda volta) al tempo $\frac{2u}{g}$, e ad un tempo prossimo a $\frac{2u}{g}$ il proiettile assumerà la y nulla anche sulla traiettoria attuale, cioè per certo valore $\frac{2u}{g} + \tau$ di t con τ infinitesimo.

Per dimostrarlo arrestiamo gli sviluppi di [20''] alla quarta potenza di t ed annulliamo la y nella nuova forma assunta.

$$[21] \quad \left(\frac{1}{32} \alpha^2 g v^2 - \frac{\alpha g^3}{24}\right) t^4 + \left(\frac{\alpha g u}{6} - \frac{1}{12} \alpha g k v\right) t^3 - \frac{g}{2} t^2 + ut = 0$$

Soppressa la evidente radice nulla, poniamo nella equazione ridotta $t = \frac{2u}{g} + \tau$. Consideriamo poi in questa ultima, con lecita approssimazione:

$$t^2 = \left(\frac{2u}{g} + \tau\right)^2 = \frac{4u^2}{g^2} + \frac{4u}{g} \tau$$

$$t^3 = \left(\frac{2u}{g} + \tau\right)^3 = \frac{8u^3}{g^3} + \frac{6u^2}{g^2} \tau$$

al fine di evitare la risoluzione dell'equazione di terzo grado cui la [21] si riduce, e otteniamo per determinare τ la seguente equazione:

$$\left(\frac{1}{32} v^2 \alpha^2 g - \frac{\alpha g^3}{24}\right) \left(\frac{8u^3}{g^3} + \frac{6u^2}{g^2} \tau\right) + \left(\frac{\alpha g u}{6} - \frac{\alpha g k v}{12}\right) \left(\frac{4u^2}{g^2} + \frac{4u}{g} \tau\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{2u}{g} + \tau\right) + u = 0$$

vale a dire:

$$\left(\frac{g}{2} - \frac{5}{12} \alpha u^2 - \frac{3}{16} \frac{\alpha^2 u^2 v^2}{g} + \frac{1}{3} \alpha k u v\right) \tau = \frac{1}{3} \frac{\alpha u^3}{g} + \frac{1}{4} \frac{\alpha^2 v^2 u^3}{g} - \frac{1}{3} \frac{\alpha k v u^2}{g}$$

della quale il coefficiente di τ ha per termine finito $\frac{g}{2}$.

Quindi è

$$[22] \quad \tau = \frac{2}{3} \frac{\alpha u^3}{g^2} - \frac{2}{3} \frac{\alpha k u^2 v}{g^2} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 v^2 u^3}{g^2} + \frac{5}{9} \frac{\alpha^2 u^5}{g^3} + \dots$$

Dunque, a meno di termini in α^2 il tempo di y nullo è

$$[23] \quad \frac{2u}{g} + \frac{2}{3} \frac{\alpha u^3}{g^2} - \frac{2}{3} \frac{\alpha k u^2 v}{g^2}$$

18. - Passiamo ora all'equazione [17']. Poniamo nel secondo membro

$$x = vt$$

$$y = ut - \frac{1}{2} g t^2$$

per cui si riduce alle quadrature:

$$[XVIII] \quad \ddot{x} = -\frac{1}{2} \alpha g \left(vt - \frac{3}{2} \alpha u v t^2 + \frac{3}{4} \alpha g v t^3 - \frac{1}{3} \alpha^2 v^3 t^3 \right).$$

Due successive integrazioni danno:

$$[24'] \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{2} \alpha g \left(\frac{1}{2} v t^2 - \frac{1}{2} \alpha u v t^3 + \frac{3}{16} \alpha g v t^4 - \frac{1}{12} \alpha^2 v^3 t^4 \right) + v \\ x &= vt - \frac{1}{12} \alpha g v t^3 + \frac{1}{16} \alpha^2 g u v t^4 - \frac{3}{160} \alpha^2 g^2 v t^5 + \frac{1}{120} \alpha^3 g v^3 t^5 \end{aligned}$$

per le quali c'è da chiarire solamente che le costanti arbitrarie sono prefissate: v per la prima integrazione in quanto rappresenta la velocità orizzontale di lancio, zero per la seconda perchè il punto di lancio è nell'origine delle coordinate.

Acquisito il risultato [24'], scriviamolo pure nella seguente forma più semplice

$$[24] \quad x = vt - \frac{1}{12} \alpha g v t^3,$$

che assumeremo come integrale della [XVII] o della [17].

La [23] dà il tempo di y nullo per la traiettoria che abbiamo studiato, ed a tale tempo la x della stessa traiettoria in seguito a facili calcoli risulta

$$x = v \left(\frac{2u}{g} + \frac{2}{3} \frac{\alpha u^3}{g^2} - \frac{2}{3g^2} \alpha k v u^2 \right) - \frac{1}{12} \alpha g v \left[\frac{8u^3}{g^3} + 3 \frac{4u}{g^2} \left(\frac{2}{3} \frac{\alpha u^3}{g^2} - \frac{2}{3g^2} \alpha k v u^2 \right) \right]$$

per cui sottraendovi la X della traiettoria classica ed escludendo i termini in α^2 si ha:

$$[25] \quad \Delta x = -\frac{2}{3g^2} \alpha k v^2 u^2$$

Per $y = 0$ la differenza tra la x del campo che abbiamo studiato e la X della traiettoria classica, a meno di termini in α^2 è data dalla [25]. Come si può notare, per $u = v = 2000$ m si ha al massimo per

$$\Delta x: \frac{2}{3} 10^{-3}, \frac{2}{6} 10^{-3}, 5.10^{-3}, 4.10^{-3}, 4.10^{-3}.$$

cioè 180 metri circa. Peraltro è da ricordarsi che k muta con l'azimut del piano di tiro ed è

$$-0,005 < k < 0,005,$$

perciò Δx riesce rigorosamente nullo se il piano di tiro coincide col piano W-E. Del resto è sempre trascurabile.

19. - Qual'è l'analogia differenza per $y = h$? Per ottenerla bisognerà uguagliare la y della [20''] ad h , o meglio, occorrerà uguagliare quella y ad

$ut - \frac{1}{2}gt^2$. Precisamente supponiamo disegnate la traiettoria classica e l'attuale come nella fig. 6, riferite cioè, queste due traiettorie ad uno stesso sistema x, y : la retta $y = h$ taglia la [I] in L ed L' , la [II] in M ed M' . Prendendo in considerazione la coppia $L' M'$, sia t il tempo di L' e $t + \tau$ il tempo di M' con τ infinitesimo e, ciò premesso, poichè per L' è valida $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$, per M' , in seguito alla [20''], deve essere:

$$c_1 \left[1 + \sqrt{\alpha g} (t + \tau) + \dots \right] + c_2 \left[1 - \sqrt{\alpha g} (t + \tau) + \dots \right] + \frac{1}{\alpha} - \frac{3}{4} \frac{v^2}{g} + \frac{1}{2} kv (t + \tau) - \\ - \frac{3}{8} \alpha v^2 (t + \tau)^2 = ut - \frac{1}{2} gt^2$$

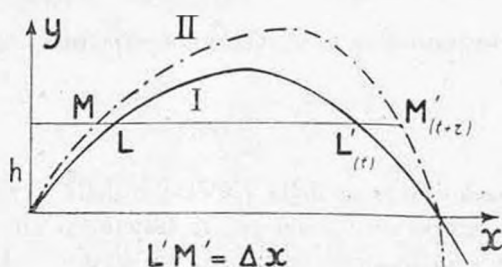


Fig. 6.

Arrestando gli sviluppi delle parentesi quadre al quarto grado, si ha per τ la seguente equazione:

$$\frac{\alpha^2 g^2}{24} \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{4} \frac{v^2}{g} \right) (t^4 + 4t^3\tau) + \left(\frac{\alpha g u}{6} - \frac{\alpha g k v}{12} \right) (t^3 + 3t^2\tau) - g t \tau + u \tau = 0$$

da cui

$$\tau = \frac{\alpha g t^3}{u - g t} \left[\left(\frac{g}{24} - \frac{1}{32} \alpha v^2 \right) t - \left(\frac{u}{6} - \frac{k v}{12} \right) \right]$$

o più semplicemente

$$[26] \quad \tau = \frac{\alpha g t^3}{u - g t} \left(\frac{g t}{24} - \frac{u}{6} + \frac{k v}{12} \right)$$

Soffermiamoci sull'espressione [26] di τ : presenta un valore critico per $t = \frac{u}{g}$, valore critico apparente però, perchè, non dipendendo da un fatto fisico, è da attribuirsi alla via analitica seguita. La correzione τ si annulla per $t = 0$ ed anche $t = \frac{4u}{g} - 2kv$, che per essere $2kv < 0,01$, riesce prossimo a $\frac{4u}{g}$. Il primo fatto è di significato evidente, il secondo, che si ha al

tempo doppio di $\frac{2u}{g}$, non sembra che interessi. Altrove τ è sempre diverso da 0 e, per quanto concerne il segno, è:

$$\begin{aligned} t &< \frac{u}{g} & \tau &< 0 \\ \frac{u}{g} &< t < \frac{4u}{g} & \tau &> 0 \end{aligned}$$

Perciò, a parità delle altre circostanze e di quota con un punto che descriva la traiettoria classica, il proiettile della traiettoria attuale è in anticipo nel ramo ascendente e, sempre a parità di quota, è in ritardo nel ramo discendente.

Ed ora passiamo al calcolo dell'incremento Δx che direttamente c'interessa. Mediante la [24] calcoliamo la x al tempo $t + \tau$, con τ tratto dalla [26], indi sottraiamovi vt : la differenza è il Δx cercato:

$$[27] \quad \Delta x = v\tau - \frac{1}{12} \alpha g v (t^3 + 3t^2\tau)$$

Circa quest'ultimo valore conviene ricercare se e quando si annulli la parte dipendente dalla prima potenza di τ , il che avviene quando:

$$\tau - \frac{\alpha g}{12} t^2 = 0.$$

Ricorrendo nuovamente al valore [26] di τ , l'ultima equazione scritta dà

$$\frac{\alpha g t^3}{u} \left(\frac{gt}{24} - \frac{u}{6} + \frac{kv}{12} - \frac{u-gt}{12} \right) = 0.$$

Perciò Δx si annulla per

$$[28] \quad t = 0$$

$$[29] \quad t = \frac{2u}{g} - \frac{2}{3} \frac{kv}{g}$$

(l'ultimo dei quali è assai prossimo a $\frac{2u}{g}$), che corrispondono a due punti caratteristici dell'asse della x : punto di lancio e punto di caduta.

Ritornando alla [27] concludiamo che in un punto generico della traiettoria, Δx dipende dalla prima potenza di τ e, per quanto riguarda il segno, si ha

$$\begin{aligned} t &< \frac{u}{g} & \Delta x &< 0 \\ \frac{u}{g} &< t < \frac{2u}{g} & \Delta x &> 0 \\ \frac{2u}{g} &< t & \Delta x &< 0 \end{aligned}$$

[30]

Riesce utile considerare Δx in un intorno cospicuo del tempo $\frac{2u}{g}$ (per semplicità vogliamo trascurare la correzione $-\frac{2}{3} \frac{kv}{g}$ della [29]). Dalle ultime due delle [30] risulta che Δx è positivo a sinistra e negativo a destra, per cui la traiettoria attuale interseca quella classica nel punto di caduta

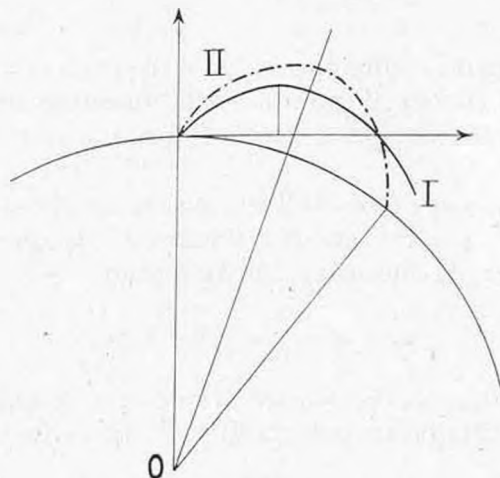


Fig. 7.

e più di quest'ultima si arcua nel tendere al punto di arrivo. La causa è da ricercarsi nel campo di gravitazione che, essendo di tipo sferico nel caso della traiettoria attuale, rende la traiettoria stessa simmetrica rispetto alla verticale condotta pel punto di mezzo tra punto di lancio e di arrivo. (Vedi fig. 7).

Il caso della figura 6 si ha se si trascura il termine in ak , cioè se non si ritiene variabile con la latitudine l'intensità di g . Se, invece, si tiene conto di codesto termine, si hanno i due casi della figura 8 (a seconda del segno di k).

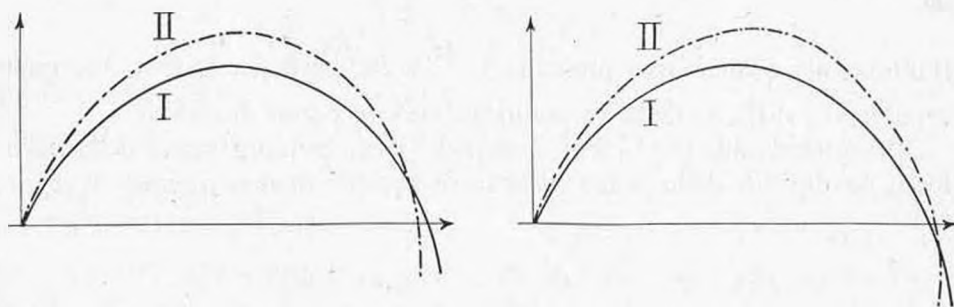


Fig. 8.

Riportiamoci nuovamente alla figura 6: per una stessa y della parabola elementare si hanno due Δx corrispondenti rispettivamente ai valori $\frac{u}{g} - h$

ed $\frac{u}{g} + h$ del tempo t . Il risultato, che riportiamo senza dimostrazione, per ambedue i valori di t è:

$$\Delta x = \mp u g v \frac{u^2 - g^2 h^2}{8g^4 h} (u \mp gh)^2,$$

ed è numericamente maggiore quello (di destra della figura) corrispondente al tempo maggiore.

Per i due casi della figura 8 il risultato di dianzi si modifica leggermente per tener conto del termine in αk ; tuttavia anche qui il Δ di destra prevale sul Δ di sinistra pur di allontanarsi sufficientemente dall'asse delle x .

20. - Le considerazioni precedenti sono essenzialmente fondate sulla corrispondenza tra i punti prossimi e d'ugual quota delle traiettorie parabo-

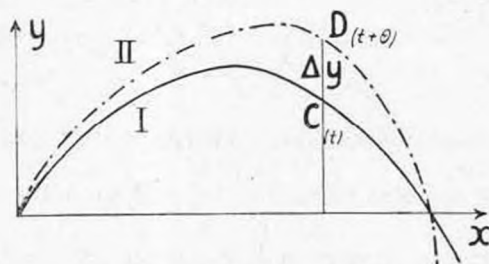


Fig. 9.

lica [I] ed attuale [II]; la corrispondenza soffre eccezioni per i punti della [II] oltre il vertice della [I], e già questo vertice si presenta singolare. Si può ovviare a ciò istituendo la corrispondenza fra i punti della [I] e della [II] aventi la stessa x . Così facendo se si indicano con t e $t + \theta$ i tempi dei due punti di uguale ascissa, e si tien presente che per la [I] è $x = vt$ e per la [II] la x è da calcolarsi dalla [24] al tempo $t + \theta$, riesce valida la seguente equazione:

$$v(t + \theta) - \frac{\alpha g v}{12} (t^3 + 3t^2\theta) = vt$$

Da questa si ricava:

$$\theta = \frac{\alpha g}{12} t^3 \left(1 + \frac{\alpha g}{4} t^2\right)$$

La variazione θ è sempre positiva ed è, limitata alla prima potenza di α :

$$\theta = \frac{\alpha g}{12} t^3$$

Con $t + \theta$ si ha il tempo del punto della traiettoria attuale [II] che ha

la stessa ascissa del punto della traiettoria parabolica [1] al tempo t ; calcolando perciò y dalla [20''] al tempo $t + \theta$ e sottraendovi $ut - \frac{1}{2}gt^2$ si ha la richiesta variazione di y .

$$\Delta y = (u - gt)\theta + \frac{ug}{6}\theta^3 - \frac{g^2}{24}\theta^4 + \alpha^2 P$$

od anche

$$\Delta y = \frac{\alpha g t^3}{4} \left(u - \frac{1}{2}gt\right)$$

In pratica, ovviamente, occorre Δx o Δy .

La conclusione che si trae da questi paragrafi è che la differenza Δx :
1° - è dell'ordine di αk (trascurabile) nell'intorno del punto di caduta $y = 0$;

2° - è dell'ordine di α in un punto generico della traiettoria.

Fatti analoghi valgono per Δy .

Codesti punti generici vanno di certo considerati nella trattazione dei teleproietti anche perchè il bersaglio ha la y (negativa) di decine di chilometri.

CONTRIBUTO DELLA GEODESIA: PRECISIONE DEI DATI GEODETICI

PER QUANTO RIGUARDA DISTANZE ED AZIMUT.

21. - Assai improprio sarebbe il titolo di questo paragrafo se si limitasse alla dizione « contributo della Geodesia », perchè ridurrebbe l'apporto a quanto fra breve tratteremo, sia pure esso essenziale, mentre, viceversa, mal si apporrebbe colui che volesse sceverare tra quanto abbiamo esaminato sinora ciò che riveste carattere di problema di Meccanica da ciò che è di spiccata pertinenza della Geodesia teoretica. Perciò la specificazione « precisione dei dati geodetici per quanto riguarda distanze ed azimut » mitiga e chiarisce.

Esaminiamo dunque la precisione con cui possono essere determinati la distanza fra due punti e l'azimut dell'uno sull'orizzonte dell'altro in base agli elementi geodetici ed ai documenti cartografici.

La questione si esaurisce presto e con risultato praticamente definito allorchè il centro della bocca da fuoco ed il punto di caduta sono individuabili su due carte topografiche derivate da un'unica rete geodetica: ad es. dintorni di Torino per l'uno, dintorni di Firenze per l'altro. Il primo punto può essere collegato alla rete geodetica con operazioni da eseguirsi sul posto, con errore trascurabile e praticamente nullo, il secondo è da trarsi dalla carta al 25.000, per cui è prevedibile un errore d'individuazione in ogni caso minore di 10 metri. Perciò è da temersi un errore di 10 metri nel calcolo della distanza ed un errore nullo per l'azimut, tenendo conto, per quest'ultimo, della precisione del goniometro impiegato in artiglieria. Tali risultati sono da ritenersi validi sia per punti assai più prossimi di quelli considerati, sia per punti assai

più distanti, purchè permanga la condizione di appartenenza delle due carte topografiche ad un'unica rete geodetica.

E' doveroso peraltro rilevare che, anche permanendo la condizione di favore di appartenenza ad un'unica rete geodetica delle due carte interessate, non è impossibile che ad una distanza rilevante dal centro della bocca da fuoco, superiore ai 400 km ad es., la localizzazione del bersaglio avvenga con un'incertezza dell'ordine di 30 metri, perchè particolari distorsioni della rete possono intervenire. Ma anche in questo caso non sembra che l'inconveniente possa interessare l'operazione balistica.

Se uno dei due punti viene rilevato da una carta anche buona, ma non appartenente alla rete geodetica cui è collegato l'altro punto, è assai difficile predire la precisione della posizione relativa dei due punti, perchè l'errore prevedibile in presenza di deviazione della verticale può facilmente raggiungere i 300 metri e non è impossibile che sia assai rilevante e che superi il chilometro.

Questa causa della deviazione della verticale, cui può aggiungersi anche quella del cambio dell'ellissoide di riferimento, provoca una migrazione della rappresentazione della regione cui appartiene il bersaglio (spostamento rigido piano), rapporto al reticolato geografico non disegnato e da concepirsi connesso con la rappresentazione della regione in cui avviene il lancio; migrazione che, come si è detto, può raggiungere anche il chilometro. Tuttavia i geodeti hanno i mezzi per ovviare all'inconveniente, pur di disporre della rappresentazione geodetica di alcuni punti nell'uno e nell'altro sistema.

Pur non essendo questa la sede, è da ricordarsi che lavori di misura, di calcolo e di disegno allo scopo di collegare le reti geodetiche confinanti alla rete interessata, o con più modesto ed immediato scopo cartografico, ne sono stati eseguiti dappertutto e da tempo con o senza la collaborazione degli Stati interessati. Ma solo in seguito all'intervento ed ai mezzi messi a disposizione dall'Army Map Service, sotto gli auspici della « Commissione Geodetica Internazionale », è stato affrontato il problema unitario di largo orizzonte scientifico dell'unificazione delle reti geodetiche europee, con serietà d'intenti e rapidità tali da far pensare — come annunciata del resto — ad una sollecita conclusione.

Circa le applicazioni balistiche è da tener presente peraltro che le guerre a venire potrebbero svolgersi nei paesi più disparati, non solamente là dove esistono diligenti lavori geodetici e, talvolta, con mezzi d'offesa aventi grande dispersione di tiro: se l'obiettivo è da rilevarsi da una carta al 500.000, l'incertezza è di 500 metri circa, a parte il contributo della deviazione della verticale sempre immanente e talvolta ignoto. Ma questa è una valutazione geometrica che può essere fallace perchè, ad es., la carta al milione d'Etiopia del 1938 in taluni punti presentava errori di 30 km.

Per concludere, i mezzi della Geodesia sono atti a fornire largamente ciò

che può occorrere in balistica purchè si disponga del materiale adeguato, materiale che dipende dallo stato di avanzamento dei lavori eseguiti.

CALCOLO DELLA DISTANZA E DELL'AZIMUT.

22. - Un'opportuna appendice di questa memoria è il calcolo della distanza e dell'azimut relativi a due punti dell'ellissoide. La precisione che qui perseguiremo è conforme alla trattazione degli art. 10, 11, 12 — pur non essendo questa precisione solita nei calcoli geodetici — appunto per non creare un'inutile eterogeneità tra calcolo geodetico assai curato e calcolo meccanico condotto al millesimo. Nè chi è aduso alla precisione che rasenta il milionesimo troverà non adeguato il rigore di tutta la trattazione purchè tenga presente che se è già codificata la dispersione del tiro classico, non può dirsi altrettanto dei teleproietti, ai quali non sembra che si addica un obbiettivo ristretto.

Dati due punti dell'ellissoide, si tratta di determinare l'arco di geodetica che li unisce (calcolo della distanza), e di orientare quest'arco (calcolo dell'azimut). Si tratta cioè della risoluzione del secondo problema o del problema inverso della Geodesia ellissoidica. Il metodo di Bessel di trasporto delle coordinate geografiche, opportunamente invertito, dà i risultati più esatti; tuttavia esistono alcune altre formule idonee allo scopo delle quali appunto ci occuperemo. Queste formule peraltro si riferiscono al calcolo ellissoidico e, pur essendo abbastanza semplici, possono semplificarsi per lo scopo particolare nostro, essendochè sino ad un campo di 3600 km. l'ellissoide si identifica con una particolare sfera tangente, quando sia sufficiente l'approssimazione del millesimo, giusta quanto abbiamo dimostrato servendoci degli sviluppi di Weingarten. Basterà perciò porre in queste formule

$$e^2 = 0; \rho = N = \sqrt{\rho N}$$

per ridursi al problema sferico. E le tavole d'aiuto si riducono ad una sola: $\sqrt{\rho N}$ in funzione della latitudine.

Tratteremo così le formule di Gauss, di Guarducci, di Pacella. Vi è poi un altro sistema di formule — il più naturale nel caso nostro — ed è la diretta applicazione della trigonometria sferica. Il calcolo numerico che segue si riferisce ad una geodetica di 1300 km circa, e sarà eseguito con tutti i metodi elencati sopra.

I calcoli, come si vede, sono semplici; tuttavia riesce indispensabile l'opera del Geodeta, al quale si richiede una solida preparazione per le delicate difficoltà che s'incontrano nello stabilire le coordinate degli estremi della traiettoria, quando le fonti geodetiche siano eterogenee.

Quanto alla precisione, persegua maggior rigore chi lo desidera (perchè non si vogliono dare delle ricette) e tolga a modello ad es. gli ottimi esempi

delle note apparse anche recentemente nel Bollettino di Geodesia e Scienze Affini (1); nella seconda delle quali trova applicazione il calcolo di una grande distanza mediante le coordinate di Gauss introdotte in Italia dal prof. Boaga. Noi — cui è anche da concedere certa libertà — calcoleremmo secondo questo criterio sino ad una distanza di 3000 km. Del resto la decisione non spetta a noi.

Ed ecco una succinta presentazione (2) dei calcoli che si riporteranno in seguito:

FORMULE DI GAUSS.

23. - Le formule di Gauss: Sphäroidische Mittelbreitenformeln (3) per l'ellissoide sono le seguenti:

$$\log(s \operatorname{sen} \alpha) = \log \frac{l \cos \varphi}{[2]} - [3] l^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + [4] b^2$$

$$\log(s \cos \alpha) = \log \frac{b \cos \frac{l}{2}}{[1]} + [5] l^2 \cos^2 \varphi - [6] b^2$$

$$\log \Delta \alpha = \log (l \operatorname{sen} \varphi) + [7] l^2 \cos^2 \varphi + [8] b^2$$

e danno distanza e azimut.

I simboli hanno i seguenti significati:

s lunghezza dell'arco geodetico,

α azimut della geodetica,

φ media delle latitudini estreme,

$b = \Delta \varphi$; $l = \Delta \lambda$; $\Delta \alpha$ differenza tra i due azimut reciproci.

Si raccomanda di badare all'edizione dello Jordan-Eggert: le due ultime (4) danno due lezioni diverse delle formule e delle tavole che, anche se equivalenti nella sostanza, possono indurre in errore.

Per quanto riguarda l'azimut da assumere tra i due forniti dal calcolo, basta ricorrere ad un disegno per scegliere l'idoneo.

Per l'ellissoide i coefficienti [1], [2]... sono variabili con la latitudine, salvo il [3], e sono riportati nello Jordan-Eggert (5) per l'ellissoide di Bessel

(1) SERGIO SALMASO: *Sul calcolo delle geodetiche lunghe*; PIERO BENCINI: *Sul calcolo della distanza e dell'azimut geodetici per la preparazione del tiro*; ambo le note in « Boll. di Geodesia e Scienze Affini », Firenze, 1951.

(2) Di proposito non ci dilunghiamo su questa trattazione, e riportiamo solo ciò che è indispensabile.

(3) JORDAN-EGGERT: *Handbuch der Vermessungskunde*. — Dritter Band, Zweiter Halbbänd, Stuttgart, 1941, pag. 94.

(4) Ci riferiamo alla già citata ed a quella del 1923, nella quale il terzo volume consta di una parte unica.

(5) Hand. d. V. Dritter B. Erst u. Zweiter Halbbänd 1938 e 1941.

ed in Baeschlin (1) per l'ellissoide internazionale. Se l'ellissoide, particularizzandosi, diventa una sfera, le formule non mutano, ed i coefficienti adeguandosi al caso attuale diventano tutti delle costanti: è questo il nostro caso. Tuttavia rimarrà variabile il raggio di questa sfera da traiettoria a traiettoria a tenore della teoria che presiede agli sviluppi di Weingarten. Per la bisogna, abbiamo riportato la tavola di $\sqrt{\rho N}$ di grado in grado, valevole per l'Ellissoide internazionale, la quale, dal 51.^{mo} parallelo al polo, è stata calcolata nell'I. G. M.. Una tavola analoga, per l'ellissoide di Bessel, è riportata dal citato libro di Jordan - Eggert, vol. III, parte prima, e la riportiamo di grado in grado dall'equatore al polo.

Ed ecco i coefficienti:

$$[1]' = [2]' = \sqrt{\rho N} (2), \text{ vedi la tavola riportata.}$$

$$[3] = [4] = [5] = \frac{1}{24} \mu \text{ arc } 1''; \mu = 6,6377843.$$

$$[6] = 0; [7] = 2 \text{ volte } [3]; [8] = 3 \text{ volte } [3].$$

FORMULA DI GUARDUCCI.

24. - Dà la distanza geodetica. La formula seguente trascura un termine della formula originaria (3) perchè nullo nel caso attuale:

$$\begin{aligned} \lg s = \lg (\rho_0 \Delta \varphi'' \text{arc } 1'') - \lg \cos \psi + A \sin^2 \varphi_0 \Delta \lambda''^2 \\ - 2A \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \psi \Delta \lambda''^2 \\ - B \cos^2 \psi \Delta \lambda''^2 \end{aligned}$$

s è la distanza in metri; ρ_0 il raggio di curvatura del meridiano (caso ellissoidico). I coefficienti nel caso sferico sono le seguenti costanti:

$$A = [7.92975]$$

$$B = [7.62872]$$

Il calcolo di ψ e di φ_0 risulta evidente dall'esempio riportato; qui si specifica che φ_0 , che dipende da φ_m — latitudine media — è argomento di entrata per calcolare, nel nostro caso, il raggio della sfera locale.

Non è opportuno l'impiego di questa formula se è piccolo il $\Delta \varphi$.

FORMULA DI PACELLA.

25. - Dà la distanza geodetica. La formula seguente trascura un termine

(1) BAESCHLIN: *Lehrbuch der Geodäsie*. — Zürich, 1948, pag. 381 e segg.

(2) Si omette $\frac{1}{\text{arc } 1''}$ che figura esplicitamente nel calcolo.

(3) F. GUARDUCCI: *Sopra due problemi di trigonometria sferoidica*. — Torino, 1882. Vedi anche: SALMASO, I. c..

presente nell'originaria (1) perchè nullo nel caso attuale:

$$\begin{aligned} \lg s = \lg (r_0 \Delta \lambda'' \text{ arc } 1'') - \lg \cos \xi - K \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \Delta \lambda''' \\ + \frac{5}{3} K \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \xi \Delta \lambda'''^2 \\ - B' \cos^2 \xi \Delta \varphi''^2 \end{aligned}$$

r_0 è il raggio del parallelo φ_0 .

I coefficienti nel caso sferico sono le costanti:

$$K = [8.10584]$$

$$B' = [7.62872]$$

Dall'esempio di calcolo riportato risulta facilmente la formazione di ξ e di φ_0 ; qui si specifica che φ_0 , che dipende da φ_m — latitudine media — è argomento d'entrata per calcolare, nel nostro caso, il raggio della sfera locale.

Non è opportuno l'impiego di questa formula se è piccolo $\Delta \lambda$.

DIRETTO IMPIEGO DELLA TRIGONOMETRIA SFERICA.

26. - La distanza può ottenersi altresì con la diretta applicazione della Trigonometria sferica: dai calcoli di pag. 42 emergono le formule impiegate.

27. - Il calcolo dell'azimut è riportato a pag. 43. Anche qui le formule emergono dal caso numerico, ed è superfluo riportarle. Giova avvertire tuttavia che è da scegliersi l'azimut utile α tra i due offerti contemporaneamente dal calcolo, e che se il punto d'arrivo è ad W dal punto di lancio, l'azimut utile è $360 - \alpha$ e non α .

PRECISIONE RAGGIUNTA ED ACCENNO AD UNA DETERMINAZIONE RIGOROSA DELL'AZIMUT.

28. - I calcoli che seguono sono condotti in base agli elementi di un caso studiato — a parte — con estremo rigore, nel problema diretto. I risultati approssimati ottenuti nel problema che c'interessa — qui riportati — confrontati con gli elementi corrispondenti rigorosi, mostrano i seguenti errori:

$$\Delta s = -800 \text{ m} ; \Delta z = +4'16''$$

conformi ai limiti previsti.

(1) G. B. PACELLA: *Una formula per il calcolo della distanza geodetica fra due punti dell'ellissoide dei quali sono assegnate le coordinate.* — Boll. Geod., Firenze, 1946. Vedi anche: SALMASO, I. c..

Può convenire, per distanze maggiori ad es. di calcolare l'azimut con precisione maggiore; e può farsi con l'ausilio della latitudine ridotta: u . Il formulario è il seguente:

$$\operatorname{tg} u = (1 - e^2)^{1/4} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\log (1 - e^2)^{1/2} = 9.9985353 \text{ (ell. intern.)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Delta \lambda \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_1)}{\cos \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\cot \frac{1}{2} (u_2 - u_1)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (u_2 + u_1)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)$$

Così, alla distanza di 1300 km, l'azimut risulta preciso al secondo. Il calcolo è a pag. 90. Anche in questo caso valgono le avvertenze fatte all'art. 27 circa la scelta dell'azimut.

Ponendo in queste formule $e^2 = 0$ si hanno le formule dell'art. 27.

* * *

Il geometra F. Biondelli, calcolatore dell'I. G. M., ha coadiuvato nell'esecuzione dei calcoli.

Calcolo della distanza - Ellissoide Internazionale (Mittelbreitenformeln)

φ_1 45°00'00"	λ_1 0°00'00"	$\Delta\lambda$ 36.050"	φ_m 50°00'00"
φ_2 55°00'00"	λ_2 10°00'50"	$\Delta\varphi$ 36.000"	$2\varphi_m$ 100°00'00"
$\lg \ell$ 4.5569053	$\lg \ell$ 4.5563025	$\lg \ell$ 4.5569053	$\lg \ell^2 \sin^2 \varphi_m$ 8.8823
$\gg \cos \varphi_m$ 9.8080675	$\gg \cos \ell/2$ 9.9983396	$\gg \sin \varphi_m$ 9.8842540	$-[3]$ 4.6287
$\gg \ell \cos \varphi_m$ 4.3649728	$\gg \ell \cos \ell/2$ 4.5546421	$\gg \ell \sin \varphi_m$ 4.4411593	$\lg I$ 3.5110
$-\lg [2]$ -8.5094632	$-\lg [1]$ -8.5094632	$\gg \ell^2 \sin^2 \varphi_m$ 8.8823	$\gg \ell^2$ 9.1126
$\lg \frac{\ell \cos \varphi_m}{[2]}$ 5.8555096	$\lg \frac{\ell \cos \ell/2}{[1]}$ 6.0451789		$+ [4]$ 4.6287
$\lg \ell^2 \cos^2 \varphi_m$ 8.7299	$\lg \frac{\ell \cos \ell/2}{[1]}$ 6.0451789		$\lg II$ 3.7413
I -3243	$\lg \frac{\ell \cos \ell/2}{[1]}$ 6.0451789	IV +4568	$\gg \ell^2 \cos^2 \varphi_m$ 8.7299
II +5512	$\lg \frac{\ell \cos \ell/2}{[1]}$ 6.0454073	V +16540	$+ [5]$ 4.6287
$\lg \frac{\ell \cos \varphi_m}{[2]}$ 5.8555096	$\gg \frac{\ell}{s} \sin \alpha$ 5.8557365	$\lg \ell^2 \sin^2 \varphi_m$ 4.4411593	$\lg III$ 3.3586
$\lg \frac{\ell \cos \varphi_m}{[2]}$ 5.8557365	$\lg \frac{\ell}{s} \sin \alpha$ 0.2654326	$\gg \Delta \alpha$ 4.4432701	$\gg \ell^2 \cos^2 \varphi_m$ 8.7299
$\lg \frac{\ell \cos \varphi_m}{[2]}$ 5.8557365	$\lg \frac{\ell}{s}$ 6.1211691		$+ [7]$ 4.9298
$\lg \frac{\ell \cos \varphi_m}{[2]}$ 5.8557365	$\gg \frac{\ell}{s} \cos \alpha$ 6.0454073	$\Delta \alpha''$ 27750"	$\lg IV$ 3.6597
$\lg \frac{\ell \cos \varphi_m}{[2]}$ 5.8557365	$\lg \frac{\ell}{s} \cos \alpha$ 0.0757618	$\Delta \alpha$ 7°42'30"	$\gg \ell^2$ 9.1126
$\lg \frac{\ell \cos \varphi_m}{[2]}$ 5.8557365	$\lg \frac{\ell}{s}$ 6.1211691	$\frac{\Delta \alpha}{2}$ 3°51'15"	$+ [8]$ 5.1058
α 32°52'06"			$\lg V$ 4.2184
$\Delta \frac{\alpha}{2}$ 3 51 15			
α_2 36°43'21"	$s = 1.321.800$		
α_1 29 00 51			

Calcolo della distanza - Ellissoide Internazionale - (formule di Guarducci)

φ_1 45°00'00"	$\Delta\varphi$ 10°00'00"	λ_1 0°00'00"	$\Delta\lambda$ 10°00'50"	φ_m 50°
φ_2 55°00'00"	$\Delta\varphi$ 36000"	λ_2 10°00'50"	$\Delta\lambda$ 36050"	
$\log \operatorname{arc} \frac{1''}{16}$ 3.481 45			$\log (\sqrt{PN})_0$ 6.804 9683	
» $\operatorname{sen} 2\varphi_m$ 9.993 35			» $\operatorname{arc} 1''$ 4.685 5749	
$2\log \Delta\lambda''$ 9.113 81			» $(\sqrt{PN})_0 \operatorname{arc} 1''$ 1.490 5432	
$\log II$ 2.588 61	$\log A$ 7.929 75		» $\Delta\varphi''$ 4.556 3025	
II'' 388"	$2\log \operatorname{sen} \varphi_0$ 9.769 88		$\operatorname{colg} \cos \varphi$ 0.074 9890	
II 6' 28"	$2\log \Delta\lambda''$ 9.113 81		$A \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \Delta\lambda''^2$ 0.000 6508	
φ_m 50°00'00"	$\log A \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \Delta\lambda^2$ 6.813 44			
φ_0 50°06'28"	$\log A \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \Delta\lambda$ 6.813 44			
	» 2 0.301 03			
	$2\log \cos \varphi$ 9.850 02			
	$\log 2A \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi \Delta\lambda''$ 6.964 49			
			$-2A \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi \Delta\lambda''$ 0.000 9215	
$\log \cos \varphi$ 9.807 0921	$\log B$ 7.628 72			
» $\Delta\lambda''$ 4.556 9053	$2\log \Delta\lambda''$ 9.113 81			
$\operatorname{colg} \Delta\varphi''$ 5.443 6975	$2\log \cos \varphi$ 9.850 02			
$\log \operatorname{tg} \psi$ 9.807 6949	$\log B \Delta\lambda'' \cos^2 \varphi$ 6.592 55			
			$-B \Delta\lambda''^2 \cos^2 \varphi$ -0.000 3913	
			$\log s$ 6.121 1727	
ψ 32°42'36"				
$\cos \psi$ 9.925 0110			$s = 1321800 \text{ m}$	

Calcolo della distanza - Ellissoide Internazionale - (formule Prof. Pacella)

φ_1	45°00'00"	$\Delta\varphi$	10°00'00"	λ_1	0°00'00"	$\Delta\lambda$	10°00'50"	φ_m 50°
φ_2	55°00'00"	$\Delta\varphi''$	36000"	λ_2	10°00'50"	$\Delta\lambda''$	36050"	

$\log \sin 2\varphi_m$	9.993 35
" arc $\frac{1}{16}$	3.481 45
$2 \log \frac{1}{16} \Delta\lambda''$	9.113 81
$\log II$	2.588 61

II	388"
II	6' 28"

φ_m	50°00'00"
φ_0	50°06'28"

$\log \Delta\varphi''$	4.556 3025
$\text{clg } \Delta\lambda''$	5.443 0947
$\text{clg } \cos \varphi_0$	0.192 9079
$\lg \text{tg } \xi$	0.192 3051
ξ	57°17'24"
$\lg \cos \xi$	9.732 7051

$\log K$	8.105 84
$2 \log \sin \varphi_0$	9.769 88
$2 \log \Delta\lambda''$	9.113 81

$$\log(K \sin^2 \varphi_0 \Delta\lambda'')^3 \quad 6.989 \ 53$$

$$\log(K \sin^2 \varphi_0 \Delta\lambda'')^2 \quad 6.989 \ 53$$

$$\text{" } 5 \quad 0.698 \ 97$$

$$\text{clg } 3 \quad 9.522 \ 88$$

$$2 \log \cos \xi \quad 9.465 \ 41$$

$$\log\left(\frac{5}{3} K \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \xi \Delta\lambda''^4\right) \quad 6.676 \ 79$$

$$\log B' \quad 7.628 \ 72$$

$$2 \log \cos \xi \quad 9.465 \ 41$$

$$2 \log \Delta\varphi'' \quad 9.112 \ 60$$

$$\log B' \cos^2 \xi \Delta\varphi''^2 \quad 6.206 \ 73$$

$$\log \sqrt{\rho N_0} \quad 6.804 \ 9683$$

$$\text{" arc } 1'' \quad 4.685 \ 5749$$

$$\text{" } \cos \varphi_0 \quad 9.807 \ 0921$$

$$\text{" } r_0 \text{ arc } 1'' \quad 1.297 \ 6353$$

$$\text{" } \Delta\lambda'' \quad 4.556 \ 9056$$

$$\text{clg } \cos \xi \quad 0.267 \ 2936$$

$$-K \sin^2 \varphi_0 \Delta\lambda''^2 \quad -0.000 \ 9762$$

$$-\frac{5}{3} K \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \xi \Delta\lambda''^4 \quad 0.000 \ 4751$$

$$-B' \cos^2 \xi \Delta\varphi''^2 \quad -0.000 \ 1610$$

$$\log 3 \quad 6.121 \ 1724$$

$$s = 1321800 \text{ m}$$

Calcolo della distanza (vedi Serret - Trigonometria) Ellissoide Internazionale

φ_1	45°00'00"	λ_1	0°00'00"	$\Delta\lambda$	10°00'50"
φ_2	55°00'00"	λ_2	10°00'50"	φ_m	50°
CALCOLO ANGOLO AUSILIARIO		CALCOLO DISTANZA ANGOLARE		CALCOLO DELLA DISTANZA S	
$tg\ \theta = cot\ \varphi_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$		$cos\ x = \frac{sen\ \varphi_1 \cdot sen(\varphi_2 + \theta)}{cos\ \theta}$		$S = x'' arc\ t'' \sqrt{\rho N}_m$	
$lg\ ctg\ \varphi_1$	0.000 0000	$lg\ sen\ \varphi_1$	9.849 4850	$log\ x$	4.630 6312
$\gg\ cos(\lambda_2 - \lambda_1)$	9.993 3329	$\gg\ sen(\varphi_2 + \theta)$	9.993 9261	$\gg\ (\sqrt{\rho N})_m$	6.804 9629
$\gg\ tg\ \theta$	9.993 3329	$ctg\ cos\ \theta$	0.147 2070	$\gg\ arc\ t''$	4.685 5749
		$lg\ cos\ x$	9.990 6181	$\gg\ S$	6.121 1690
θ	44°33'37"	x	11°52'00"	S	1.321.800 m
φ_2	55	x''	42 720"		
$(\theta + \varphi_1)$	99°33'37"				

Calcolo dell'Azimut

Ellissoide Internazionale

φ_1 45°00'00"	λ_1 0°00'00"	$(\varphi_1 + \varphi_2) 100^\circ$	$\varphi_2 - \varphi_1 10^\circ$	$\lambda_2 - \lambda_1 10^\circ 00' 50''$	
φ_2 55°00'00"	λ_2 10°00'50"	$\frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) 50^\circ$	$\frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) 5^\circ$	$\frac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_1) 5^\circ 00' 25''$	
CALCOLO DI $\frac{1}{2} (\alpha - \alpha')$		CALCOLO DI $\frac{1}{2} (\alpha + \alpha')$		CALCOLO DI α ED α'	
$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_1)$	8.942 56	$\log \cot \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)$	1.058 05	$\frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_1)$	32°52' 10"
» $\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$	9.884 25	» $\lg \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)$	8.828 47	$\frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)$	3 51 15
$\operatorname{colg} \cos \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)$	0.001 66	$\operatorname{colg} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2)$	9.923 82		
$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)$	8.828 47	$\lg \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_1)$	9.810 34	α_2	36°43' 25"
$\frac{1}{2} (\alpha_2 - \alpha_1)$	3°51' 15"	$\frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_1)$	32°52' 10"	α_1	29 00 55

Calcolo dell'Azimut con l'ausilio della latitudine ridotta - *Ellissoide Internazionale*

φ_1 45°00'00"	λ_1 0°00'00"	$\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$ 50°	$\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$ 5°00'25"
φ_2 55°00'00"	λ_2 10°00'00"	$\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$ 5°	
$\log \sqrt{1-e^2}$ 9.998 5353	$\log \sqrt{1-e^2}$ 9.998 5353	u_2 54°54'33"	
» $\lg \varphi_2$ 0.154 7732	» $\lg \varphi_1$ 0.000 0000	u_1 44°54'12"	
» $\lg u_2$ 0.153 3085	» $\lg u_1$ 9.998 5353	$\frac{1}{2}(u_2 - u_1)$ 5°00'10"	
u_2 54°54'33"	u_1 44°54'12"	$\frac{1}{2}(u_2 + u_1)$ 49 54 22	
$\log \lg(\lambda_2 - \lambda_1)$ 8.942 5576	$\log \cotg \frac{1}{2}(u_2 - u_1)$ 1.057 8058	$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)$ 32°56'26"	
» $\sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)$ 9.884 2540	» $\lg \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$ 8.828 4676	$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$ 3 51 15	
$\cotg \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$ 0.001 6558	$\cotg \lg \frac{1}{2}(u_2 + u_1)$ 9.925 2584	α_2 36°47'41"	
$\log \lg \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$ 8.828 4674	$\log \lg \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)$ 9.811 5318	α_1 29 05 11	
$\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$ 3°51'15"	$\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)$ 32°56'26"		

Logaritmi di $\sqrt{\rho N}$ per l'Ellissoide Internazionale

α	$\text{Log.} \sqrt{\rho N}$	α	$\text{Log.} \sqrt{\rho N}$
0	6 803 24620	24	6 803 72947
1	24709	25	76797
2	24975	26	80762
3	25419	27	84837
4	26040	28	89017
5	26837	29	93297
6	27810	30	97671
7	28956	31	6 804 02136
8	30275	32	06684
9	31765	33	11311
10	33424	34	16011
11	35251	35	20778
12	37242	36	25607
13	39396	37	30492
14	41710	38	35426
15	44182	39	40404
16	46807	40	45419
17	49584	41	50466
18	52508	42	55538
19	55577	43	60630
20	58786	44	65735
21	62132	45	70846
22	65610	46	75959
23	69217	47	81065

Segue: Logaritmi di $\sqrt{\rho N}$ per l'Ellissoide Internazionale

$^{\circ}$	$\text{Log.} \sqrt{\rho N}$	$^{\circ}$	$\text{Log.} \sqrt{\rho N}$
48	6 804 86160	71	6 805 86423
49	91236	72	89508
50	96289	73	92448
51	6 805 01311	74	95241
52	06296	75	97881
53	11239	76	6 806 00367
54	16133	77	02696
55	20972	78	04863
56	25751	79	06867
57	30463	80	08705
58	35102	81	10375
59	39665	82	11874
60	44145	83	13202
61	48535	84	14356
62	52831	85	15335
63	57027	86	16137
64	61118	87	16762
65	65100	88	17209
66	68967	89	17478
67	72715	90	17567
68	76339		
69	79834		
70	83197		

Logaritmi di $\sqrt{pN}$ per l'Ellissoide di Bessel

°	Log. $\sqrt{pN}$	°	Log. $\sqrt{pN}$
0	6 803 18928	24	6 803 66908
1	19017	25	70731
2	19281	26	74667
3	19722	27	78713
4	20339	28	82862
5	21130	29	87112
6	22096	30	91455
7	23234	31	95887
8	24543	32	6 804 00403
9	26022	33	04997
10	27670	34	09663
11	29483	35	14396
12	31460	36	19190
13	33599	37	24039
14	35896	38	28938
15	38350	39	33879
16	40957	40	38859
17	43713	41	43869
18	46617	42	48905
19	49663	43	53960
20	52849	44	59028
21	56171	45	64103
22	59624	46	69178
23	63205	47	74248

Logaritmi di $\sqrt{PN}$ per l'Ellissoide di Bessel

°	Log. $\sqrt{PN}$	°	Log. $\sqrt{PN}$
48	6 804 79306	70	6 805 75642
49	84346	71	78845
50	89362	72	81908
51	94347	73	8483
52	99297	74	8760
53	6 805 04204	75	9022
54	09063	76	9269
55	13867	77	9500
56	18611	78	9715
57	23290	79	9914
58	27897	80	6 806 0097
59	32426	81	0262
60	36873	82	0411
61	41231	83	0543
62	45496	84	0658
63	49661	85	0755
64	53723	86	0834
65	57676	87	0897
66	61515	88	0941
67	65236	89	0968
68	68834	90	0976
69	72304		

IMPIEGO DELLE FORMULE GENERALI DI BALISTICA INTERNA PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA BALISTICO PRINCIPALE IN ALCUNI CASI PARTICOLARI

Col. d'art. (S.Te.A.) Giovenale Argan

Il presente studio si propone di mostrare come le formule generali di Balistica Interna Razionale consentano di risolvere (rigorosamente o per approssimazione) il problema principale della Balistica Interna, anche in alcuni casi per lo più considerati inaccessibili al calcolo basato su metodi razionali.

In particolare è possibile, in generale, la trattazione razionale del problema (nel quadro delle formule generali suddette) non solo per espressioni qualsiasi della funzione di forma, ma anche se la funzione che appare nella nota formula di Sébert - Hugoniot, della velocità nel primo periodo del moto, dipende oltrechè dalla funzione di forma, anche dai parametri di caricamento. Entro certi limiti, si può tenere altresì razionalmente conto, nei calcoli, delle resistenze passive, anche se queste non possono considerarsi, com'è d'uso, proporzionali alla pressione (metodo di maggiorazione di massa).

Siano, secondo le notazioni presso di noi usuali: v , $\bar{v}$, v_1 e v_b , rispettivamente, la velocità corrente, la velocità nel punto di pressione massima, la velocità al termine del periodo di combustione (1° periodo) e la velocità alla bocca;

P , $\bar{P}$, P_1 e P_b , le corrispondenti pressioni unitarie sul fondello del proiettile; f la cosiddetta forza dell'esplosivo (che in effetti ha le dimensioni di una lunghezza e perciò da esprimersi, con le unità solite, in dm);

$\theta = \gamma - 1$ dove γ è l'esponente della politropica;

q = frazione di carica combusta ($q = 1$ al termine del periodo di combustione);

s = spazio percorso dal proietto entro l'anima;

z = lunghezza del volume libero della camera a polvere ($z = \frac{W - \gamma \omega}{\Omega}$) ove:

W = volume camera a polvere,

ω = peso di carica,

τ = funzione del covolume z dell'esplosivo, di q e della densità ρ dell'esplosivo solido. In pratica, τ si considera costante, assumendone un conveniente valore medio. Ω è la superficie della sezione retta dall'anima,

ρ = numero d'espansioni $\left(\rho = \frac{s+z}{z} \right)$,

μ = massa del proietto eventualmente maggiorata per tener conto, almeno in prima approssimazione, delle perdite di energia.

Le soluzioni razionali del problema principale della Balistica Interna, proposte dai vari Autori, si riducono, in sostanza, a soluzioni particolari del seguente sistema di equazioni:

Se si pone: $\varphi = (\psi - \psi)^2$ dove ψ è in generale funzione della frazione di carica combusta q

$$\text{e } v^2 = \frac{2f\omega}{H\mu} \varphi \quad (\text{formula di Sébert - Hugoniot}) \quad [1]$$

dove: $H = \frac{2fw^2\omega\mu}{P_1^2\Omega^2l_1^2}$ (modulo di caricamento).

Si ha:

$$[I] \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{f\omega}{z\Omega} \frac{q_0 + \int_{q_0}^q \rho\theta \, dq}{\rho\theta + \theta} \quad [2] \\ v^2 = \frac{2f\omega}{\theta\mu} \left(q - \frac{q_0 + \int_{q_0}^q \rho\theta \, dq}{\rho\theta} \right) \quad [1 \text{ bis}] \\ \varepsilon = \log_e \rho = \frac{1}{H} \int_{q_0}^q \frac{\varphi' \, dq}{\theta - \frac{\theta}{H} \varphi} \quad \text{dove } \rho = e^\varepsilon \quad [3] \end{array} \right.$$

$$\text{ovvero, anche: } \log_e \varepsilon = \int_{q_0}^q \frac{d\varphi}{q - \frac{\theta}{H} \varphi} \log_e q_0 \quad [3 \text{ bis}]$$

avendo posto:

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \rho\theta$$

Tale sistema di equazioni [I] sussiste in quanto si ammettano le seguenti ipotesi (I):

1° - che sia valida la formula di Rèsal:

$$P\Omega(s+z) + \frac{\theta\mu v^2}{2} = f\omega q \quad [4]$$

la quale esprime il principio di equivalenza della Termodinamica;

(I) ARGAN G.: «Su alcune formule generali di Balistica Interna» in *Rivista di Artiglieria e Genio - Suppl. tecnico*, marzo, 1934.

2° - che l'espansione dei gas avvenga secondo una politropica;

3° - che sia lecito scrivere (1):

$$\frac{l_1 d\psi}{dt} = w \frac{P}{P_i} \quad [5] \text{ (funzione di } q \text{ a parità di condizioni di caricamento).}$$

Da cui:

$$d\psi = \frac{w}{l_1 P_i} P dt$$

ed integrando:

$$\psi - \psi_0 = \frac{w}{l_1 P_i} \frac{1}{\Omega} v \quad [6]$$

donde la [1].

Ovviamente, la [1 bis] e la [2] valgono tanto per il primo periodo (fase di combustione ed espansione) che per il secondo (fase di sola espansione) sol che, naturalmente, per quest'ultimo, si consideri $q = 1$ e si assuma come costante l'integrale al secondo membro, il quale, durante tale periodo mantiene il valore raggiunto alla fine del primo periodo, e cioè:

La [1] interessa soltanto il primo periodo cui pure, unicamente, si riferiscono la [3] e la [3 bis].

La quantità $l_1 \frac{d\psi}{dt}$ si usa definire quale velocità lineare di combustione del grano di polvere ed alla costante w (valore da essa assunto alla pressione unitaria) si attribuiscono le dimensioni di una velocità.

Evidentemente, in linea analitica, la terza delle suddette condizioni, espressa dalla [5] e dalla [6], esige soltanto che la ψ debba essere una funzione numerica della frazione di carica combusta q (che, d'altra parte, è pur essa un numero).

In linea pratica occorre che la ψ sia tale da riprodurre con sufficiente approssimazione per ciascuna q , mediante la [5] e la [6], i valori sperimentali delle pressioni o conseguentemente delle velocità.

Il che in sostanza significa:

1° - che la Balistica Interna Razionale, sintetizzata nel sistema [1], è suscettibile di notevoli generalizzazioni;

2° - che, come si è avvertito, per la validità del sistema [1] agli effetti della sua utilizzazione in Balistica Interna, non si esige necessariamente che la ψ sia funzione della *sola* frazione di carica combusta (v. 3ª ipotesi di cui sopra), nè che, suo tramite, debba dipendere dalla sola funzione di forma.

(1) Indico esplicitamente P_i allo scopo di assicurare alla w le dimensioni di una velocità. Si attribuisce a P_i il valore di 1 kg/dm² per mantenere la validità delle tabelle numeriche in uso.

I. - VELOCITÀ LINEARE DI COMBUSTIONE DEL GRANO NON PROPORZIONALE ALLA PRIMA POTENZA DELLA PRESSIONE.

Se con y si indica la frazione di spessore combusta (considerata come funzione della *sola* frazione di carica combusta q , *deducibile da questa con considerazioni prevalentemente basate sulla forma geometrica del grano*) dai risultati delle esperienze in vaso chiuso, si ha, com'è noto, con notevole approssimazione:

$$\frac{l_1 dy}{dt} = w \left(\frac{P}{P_i} \right)^n \quad n = \text{cost.} \quad [7]$$

Quasi tutti gli studiosi di Balistica Interna (Moisson, Sébert, Hugoniot, Mata, Charbonnier, Sugot, Bianchi, Kaiser, Schmitz, Regii, Mainardi, ecc.) hanno considerato accettabile il valore 1 per l'esponente n .

In tal modo la y viene ad identificarsi con la ψ ed il sistema di equazione [I] è senz'altro applicabile; posto che si sia fissata, in base alla forma dei grani, una conveniente relazione (funzione di forma) tra y e q .

Altri, però (particolarmente fra gli sperimentatori) non hanno ritenuto, come si sa, ammissibile il valore $n = 1$.

Il Saint Robert, per le polveri nere, ed il Gossot ed il Liouville, per tutte le polveri in genere, ma soprattutto per quella a base di nitrocellulosa, proposero $n = 2/3$; il Sarrau ed il Vahlen $n = 0,5$; il Desmazières $n = 0,85$; il Vieille, un particolare valore di n per ciascuna specie di polvere ecc.

E' da osservare che poichè trattasi di un esponente, differenze anche non grandi nel valore di esso, possono produrre errori non trascurabili, nei risultati.

E' chiaro che per $n < 1$ (non si considerano valori di n maggiori dell'unità) la y non può più identificarsi con la ψ .

Inoltre il sistema [I] non è più rigorosamente utilizzabile, perchè in generale l'integrale della [3], o (il che è lo stesso) della [3 bis], che è la chiave di volta del sistema, diviene inabbordabile al calcolo.

Se si pone infatti:

$$\frac{l_1 dy}{dt} = w \left(\frac{P}{P_i} \right)^n$$

confrontando con la [5], si ha:

$$l_1 \frac{1}{n} \left(\frac{dy}{dt} \right)^{\frac{1}{n}} = w \frac{P}{P_i} = l_1 \frac{d\psi}{dt} \quad [8]$$

Con tale posizione, nulla formalmente è mutato ed il sistema [I] si potrebbe ancora scrivere, ma non si perviene a risolverlo neanche approssimativamente perchè non si riesce ad esprimere ψ in funzione di y (funzione data di q) e quindi di q .

Si potrebbe evidentemente immaginare ψ corrispondente ad una funzione arbitraria di q . Allora si riuscirebbe a risolvere il sistema e la soluzione trovata sarebbe valida per una polvere ipotetica, cui potesse competere la y deducibile, a sistema così risolto, dalla [8].

Tale procedimento, inverso, non avrebbe però, ovviamente, interesse pratico.

Perciò, chi, come il Gossot ed il Liouville, si è rifiutato di accogliere l'ipotesi $n = 1$, ha dovuto ricorrere a soluzioni empiriche o semiempiriche del problema principale della Balistica Interna.

L'ipotesi:

$$l_1 \frac{dy}{dt} = w \left(\frac{P}{P_1} \right)^n$$

non si accorda, del resto, che col tratto centrale (pressochè rettilineo) delle curve dedotte dalle esperienze in vaso chiuso; verso gli estremi queste presentano una accentuata curvatura.

Particolarmente interessanti, a questo proposito, sono le curve di Schmitz (1).

Queste curve rappresentano il diagramma, in vaso chiuso, $(q, \int_0^t P dt)$.

Anch'esse si presentano all'incirca rettilinee, nel tratto tra $q = 0,15$ e $q = 0,95$. Se, a parità di ogni altra circostanza, si opera con diverse densità di caricamento, le corrispondenti curve, nel tratto centrale, non si sovrappongono, ma si mantengono pressochè parallele fra loro.

Per il tratto centrale, dette curve, possono, pertanto, essere rappresentate da:

$$q = \alpha(\Delta) + K \int P dt \quad [9]$$

dove α si può ritenere, per la polvere impiegata, funzione della sola densità di caricamento.

Ne deriva:

$$q - \alpha(\Delta) = K \int P dt$$

Ove si accetti l'ipotesi consueta $n = 1$ ed il riferimento alla funzione di forma $y(q)$ e cioè:

$$l_1 \frac{dy}{dt} = w \frac{P}{P_1}$$

Ne deriverebbe:

$$q - \alpha(\Delta) = \int_{y_0}^y dy = y - y_0$$

(1) V. *Mémorial de l'Artillerie Française*, 1915, pag. 92-32; DUPUIS J.: « Notes sur les lois de combustion des poudres », (*Mémorial de l'Artillerie Française*, 1938, pag. 199 e seguenti).

e pertanto y non si potrebbe più ritenere, per una polvere di data granitura, funzione della sola q come esige la sua usuale definizione.

Nell'intento di generalizzare il concetto della fusione di forma, e di sottrarre quindi la y (frazione di spessore combusto) alla stretta dipendenza dalle caratteristiche puramente *geometriche* del grano, lo Charbonnier adottò, com'è noto, un parametro A (caratteristica di vivacità, costante per ogni tipo di polvere) ponendo (in notazioni nostre):

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(1-q)^\beta} \frac{dq}{dt} = A \frac{P}{P_1}$$

Oppure:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{q^\beta} \frac{dq}{dt} = A \frac{P}{P_1}$$

secondochè trattasi di polveri degressive o progressive (β è un parametro dipendente dalla polvere e determinabile con considerazioni geometriche o anche sperimentalmente).

Tuttavia, la funzione di forma dello Charbonnier, resta funzione della sola q , a parità di polvere, ed in particolare è indipendente dalla densità di caricamento (mentre non lo è necessariamente la ψ nella [5]).

Su ciò soprattutto, si badò il Dupuis (1) per affermare l'incompatibilità dell'ipotesi $n = 1$ (ed anche del concetto usuale della funzione di forma) con i risultati delle esperienze in vaso chiuso. Nell'introduzione al suo studio egli esprime assai efficacemente l'importanza teorica e pratica delle due questioni (determinazione della $f(P)$ da porsi al secondo membro della [7] e generalizzazione del concetto di funzione di forma) così concludendo:

« Lo stato presente della Balistica Interna è del tutto analogo a quello della Balistica Esterna ai tempi d'Eulero e della resistenza quadratica. Se per un fortunato caso, il magistrale adattamento all'esperienza delle formule Charbonnier... basta a tutte le necessità usuali, per quanto riguarda gli elementi principali, velocità e pressione massima, sarebbe tuttavia dannoso rinunciare a priori ad una conoscenza più profonda dei fenomeni e ad un qualsiasi mezzo di previsione di quanto si verifica in condizioni di caricamento eccezionali ».

La critica del Dupuis non infirma, in generale, l'applicabilità del sistema di equazioni [I], il quale ha un campo di validità più lato di quanto non possa sembrare allorchè si identifica la frazione di spessore combusto y (nel suo ordinario significato connesso alla funzione di forma geometrica) con la ψ della [5]. Per quest'ultima, giova ripeterlo, si esige soltanto che sia funzione di q , a parità di condizioni di caricamento. Quindi potrà, eventualmente, dipendere anche dai parametri di caricamento (che ovviamente nella risoluzione

(1) DUPUIS J., o. c.

del sistema si considerano poi come costanti) ed in particolare ad esempio, dalla Δ .

Per chiarire l'importanza della distinzione, torniamo alle curve di Schmitz.

A puro titolo esemplificativo, si può porre, nella [9] $\alpha(\Delta) = M\Delta$ con M costante, e forse non si andrebbe troppo lontano dal vero.

Ma la [9] non può considerarsi valida per il tratto iniziale (tra $q = 0$ e $q = 0,15$ all'incirca) in cui le curve di Schmitz tendono a confondersi in una sola; e cioè diventano indipendenti dalla densità di caricamento. Per tale tratto potrebbe ammettersi (sempre in via esemplificativa) una relazione di questo genere:

$$q = a + c \int P dt \quad (a \text{ e } c \text{ costanti a parità di polvere}).$$

In prima approssimazione si può supporre poi che questa relazione sia valida per la sola fase (anteriore all'inizio del moto del proiettile) in cui la combustione della carica si svolge come in vaso chiuso e che, pertanto, essa valga a determinare soltanto la frazione di carica combusta q , corrispondente alla pressione di forzamento P_0 .

Cosicchè tenuta presente la [9] in confronto con la [6] si potrà scrivere:

$$\Psi - \Psi_0 = q - M\Delta - q_0 + a = Nv \quad (N \text{ costante})$$

il che permetterà di determinare

$$\varphi = [\Psi - \Psi_0]^2$$

in funzione di q e quindi di porre il sistema [1], salvo opportuna precisazione delle costanti.

Ciò non sarebbe stato possibile, come si è visto, ricorrendo alla funzione di forma dello Charbonnier ed alle altre analoghe.

SOLUZIONE APPROSSIMATA PER ESPONENTE $N < 1$.

Se nella [7] si ammette $n < 1$ si avrà, come si è visto

$$l_1 \frac{dy}{dt} = w \left(\frac{P_n}{P_i} \right)^n$$

e si potrà porre:

$$l_1 \frac{d\Psi}{dt} = w \frac{P_n}{P_i} = l_1 \left(\frac{dy}{dt} \right)^{\frac{1}{n}} \quad [8]$$

da cui:

$$\frac{d\Psi}{dy} = P_n^{1-n} \quad [8 \text{ bis}]$$

indicando con P_n la relativa pressione.

Ora, per $n = 1$ si ha:

$$dy = \frac{\omega}{l_1 P_1} P dt$$

ed analogamente per $n < 1$, con la posizione fatta, si avrà:

$$d\Psi = \frac{\omega}{l_1 P_1} P_n dt$$

da cui, ricordando la [8]:

$$v = \frac{1}{P_1^{1-n}} \int_{v_{n0}}^{v_n} P_n^{n-1} v_n \quad [10]$$

dove v indica la velocità relativa al caso $n = 1$ e v_n quella relativa al caso $n < 1$ (a parità di ogni altra condizione) ed in particolare di frazione di carica combusta q .

La posizione [8] non consente, come si è osservato, di utilizzare in via analitica il sistema [I] perchè non si raggiunge, nelle equazioni differenziali che ne conseguono, la separazione delle variabili. Il problema principale della Balistica Interna in questo caso non è pertanto, in generale, analiticamente risolvibile con assoluto rigore.

Però (almeno per n sufficientemente prossimo all'unità) si può ricorrere ad un procedimento per approssimazioni successive.

Infatti, dalla [10] si deduce:

$$P_n^{1-n} dy = \frac{\omega}{l_1 P_1} d\Psi \quad [11]$$

Ora se in prima approssimazione si suppone:

$$P_n^{1-n} \approx P_1^{1-n}$$

ne deriva:

$$\frac{1}{P_1^{1-n}} \int_{y_0}^y P_1^{1-n} dy = \frac{W}{l_1 P_1} \frac{\mu}{\Omega} v_n \quad [12]$$

il che, assunta una conveniente funzione di forma $y(q)$, consente di calcolare per ogni q un primo valore approssimato di v_n , mediante i valori dei vari elementi (in particolare della pressione) relativi all'ipotesi $n = 1$.

Si potrà così dedurre un primo diagramma approssimato di φ_n in funzione di q e quindi, ricorrendo al sistema [I], un corrispondente primo diagramma (P_n, q) .

Posti nel primo membro della [12] i valori P_n così ottenuti, si perverrà ad un secondo valore approssimato di v_n donde un nuovo diagramma (φ_n, q) e correlativamente (P_n, q) e così di seguito.

Un controllo dell'approssimazione raggiunta si potrà ottenere tracciando e confrontando tra loro i diagrammi successivamente ottenuti, che, ovviamente, devono sempre più ravvicinarsi tra loro.

L'integrale $\int_{y_0}^y P^{1-n} dy$ generalmente dovrà essere calcolato con metodi grafici, ma ciò non costituirà rilevante pregiudizio se si tengono abbastanza prossimi i limiti d'integrazione e se n non differisce troppo dall'unità.

Pure graficamente si dovrà in genere effettuare il calcolo dell'integrale della [3] nelle successive soluzioni del sistema [I] basate sui diagrammi (φ_n, q) successivamente dedotti.

L'interesse, per la Balistica Interna, di valersi di procedimenti grafici, fu già messo in ampio rilievo dal Cranz, che propose, appunto, soluzioni del problema principale, basate su di essi (1).

E ciò non tanto per speditezza di calcolo, quanto per poter effettuare le integrazioni anche se la funzione di forma (magari dedotta sperimentalmente) è tale da non consentire il calcolo degli integrali per via analitica.

Come si rileva dalla [6]:

$$\int_{y_0}^y dy = \frac{w}{l_1 P_1} \frac{1}{\Omega} v$$

e poichè P^{1-n} è certamente maggiore di 1 si deduce dalla [12] che « a parità di ogni altra circostanza *ed in particolare di q* e della funzione di forma, accogliendo l'ipotesi $n < 1$ (per n prossimo ad 1) si ottengono valori delle velocità maggiori di quelli che si sarebbero ottenuti supponendo $n = 1$ ».

Come si può dedurre dalla [1] e dalla [3 bis] si ha, rispettivamente per il caso $n = 1$ e per il caso $n < 1$

$$\log_e \xi = \int_{q_0}^q \frac{dq}{q - \frac{\theta \mu}{2f_w} \varphi} + \log_e q_0$$

$$\log_e \xi_n = \int_{q_0}^q \frac{dq}{q - \frac{\theta \mu}{2f_w} \varphi_n} + \log_e q_{on}$$

avendo posto:

$$\frac{d\xi}{dq} = \rho_\theta \quad \text{e} \quad \frac{d\xi_n}{dq} = \rho_n$$

Poichè le funzioni φ e φ_n sono rispettivamente proporzionali a v^2 e v_n^2 a parità di q si avrà:

$$\varphi_n > \varphi$$

eppertanto $\xi_n > \xi$ (se q_{on} è sensibilmente uguale a q_0) ed in conseguenza $\rho_n > \rho$.

Poichè dalla [1], [1 bis] e [2] si ha:

$$P = \frac{f^2 \omega^2}{2 \Omega} \frac{q - \frac{\theta \mu}{f_w} v^2}{\rho}$$

a parità di q , risulterà in generale: $P_n < P$.

(1) V. CRANZ: « Lehrbuch der Ballistik » II vol., § 38, pag. 271 segg. (Berlino, 1926).

SOLUZIONE SECONDO UNA IPOTESI DEL DUPUIS.

Nello studio citato, il Dupuis, in base alle proprie od altrui esperienze in vaso chiuso, ritenne che la relazione tra la velocità lineare di combustione del grano, e la pressione potesse rappresentarsi, meglio che con la [7] con la seguente relazione:

$$l_1 \frac{dy}{dt} = \frac{K}{P_1} (P + p) \quad [17 \text{ bis}]$$

dove p è una costante avente le dimensioni di una pressione.

Il Dupuis le attribuisce il valore di 200 Kgr/cm² (1).

E' interessante vedere, se, nell'ipotesi del Dupuis è possibile una soluzione per lo meno approssimata del problema principale di Balistica Interna, a mezzo del sistema di equazioni [I].

Dalla [7 bis] si ha, successivamente:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K}{l_1 P_1} [P + p] \quad [13]$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{K}{l_1 P_1} p = \frac{K}{l_1 P_1} P$$

$$[y - y_0] - \frac{K}{l_1 P_1} p \int_0^t dt = \frac{K}{l_1 P_1} \int_0^t P dt \quad [13 \text{ bis}]$$

Ricordando che $dt = \frac{ds}{v} = \frac{z d\rho}{v}$ e ponendo $\frac{K}{l_1 P_1} = M$ dalla [13 bis] si ha:

$$[y - y_0] - \frac{M p z}{v} \int_1^\rho \frac{d\rho}{v} = \frac{M \mu}{\Omega} v$$

e derivando rispetto a ρ :

$$\frac{dy}{d\rho} - \frac{M p z}{v} = \frac{M \mu}{\Omega} \frac{dv}{d\rho}$$

da cui:

$$\frac{dy - \frac{M \mu}{\Omega} dv}{d\rho} = \frac{M p z}{v}$$

e in conseguenza:

$$v dy - \frac{M \mu}{\Omega} v dv = M p z d\rho$$

ed infine, integrando:

$$\int_{y_0}^y v dy - \frac{M}{2} \frac{\mu}{\Omega} v^2 = M p z (\rho - 1) \quad [14]$$

(1) E' da notare che per pressione P nulla la velocità lineare di combustione del grano non si annullerebbe, secondo la [7 bis], il che il Dupuis ritiene possibile, basandosi su risultati di esperienze del Loiseau e semprechè, bene inteso, siano superate le difficoltà di accensione.

da cui:

$$\rho = \frac{\int_{y_0}^y y dy}{M \rho z} - \frac{\mu}{2 \Omega \rho z} v^2 + 1$$

E' facile vedere che dal sistema di equazioni [1] si deduce senz'altro:

$$\log_e \rho = \frac{\mu}{f_{\omega}} \int_a^v \frac{v dv}{q - \frac{\Theta \mu}{f_{\omega}} v^2} \quad [3 \text{ ter}]$$

La [14] e la [3 ter] dovranno coesistere. Eppertanto, considerandone i secondi membri come funzioni di v si dovrà avere:

$$\frac{\frac{\mu}{f_{\omega}}}{q - \frac{\Theta \mu}{f_{\omega}} v^2} = \frac{\frac{d \int_{y_0}^y v dy}{M \rho z dv} - \frac{\mu v}{\Omega \rho z}}{\frac{\int_{y_0}^y v dy}{M \rho z} - \frac{\mu}{2 \Omega \rho z} v^2 + 1} \quad [15]$$

che è una equazione differenziale tra le due variabili v ed y (dovendosi q considerare come una funzione nota di y). Senonchè nella [15] le due variabili non sono, in generale, separabili, eppertanto essa non è praticamente utilizzabile.

Si può però notare che dalla [13] si ha:

$$\frac{dy}{z d\rho} v - M\rho = MP$$

ed osservando che $\rho = \frac{\mu}{\Omega z} v \frac{dv}{d\rho}$ si ottiene:

$$\frac{\Omega}{\mu} P \frac{dy}{dv} - M\rho = MP \quad [16]$$

da cui:

$$\frac{dy}{dv} = \frac{M\mu}{\Omega} + \frac{M\mu}{\Omega} \frac{p}{P} \quad [17]$$

ed in conseguenza:

$$dy = \frac{M\mu}{\Omega} dv + \frac{M\mu}{\Omega} \frac{p}{P} dv$$

ed integrando:

$$y - y_0 = \frac{M\mu}{\Omega} v + \frac{M\mu p}{\Omega} \int_0^v \frac{dv}{P} \quad [18]$$

Se nell'integrale al secondo membro, poniamo, in prima approssimazione, la pressione che, a parità di v (e delle costanti di caricamento) si otterrebbe se nella [13] si avesse $p = 0$, l'integrale stesso diviene calcolabile con metodi approssimati e, pertanto, si può ricavare dalla [18] un primo valore, approssimato, di y (e quindi di q) in funzione di v .

Dedotto, così, un diagramma di prima approssimazione, tra y e v , si potrà calcolare, mediante la [13 bis]:

$$y - y_0 - \frac{M_{\mu} v}{\Omega} = M p \int dt$$

e se si pone:

$$y - y_0 - M p \int dt = \Psi - \Psi_0 \quad \text{si avrà:} \quad \Psi - \Psi_0 = \frac{M_{\mu}}{\Omega} v \quad [19]$$

del tutto analogo alla [6].

Ricordando la formula di Abel:

$$P = \frac{f q}{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\frac{\Delta}{\alpha} - \frac{1}{\Delta}} q}$$

dove i simboli hanno il noto significato ed in particolare Δ è la densità di caricamento, ne deriva, in vaso chiuso:

$$M p \int_0^{t_0} dt = M p t_0 = M p \int_0^{y_0} \frac{dy}{M p + \frac{M f q}{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\frac{\Delta}{\alpha} - \frac{1}{\Delta}} q}}$$

il cui secondo membro è calcolabile essendo nota la relazione (funzione di forma) tra y e q

epertanto: $\psi_0 = y_0 - M p t_0$ e quindi: $\psi = y - M p t$.

Dalla [19] si deduce:

$$v^2 = \frac{\Omega}{M_{\mu}} [\Psi - \Psi_0]^2$$

analogo alla [1] ove si ponga $\frac{\Omega}{M_{\mu}} = \frac{2f\omega}{h\mu}$ e $[\Psi - \Psi_0]^2 = \varphi$

essendo h il modulo di caricamento competente all'ipotesi del Dupuis.

Si potrà così ricavare, usufruendo del sistema [I] un nuovo diagramma (v, P) che permetterà di calcolare, mediante la [18], un diagramma, più approssimato, di y (ed in conseguenza di q) in funzione di v . E così di seguito, ove sia richiesta una maggiore approssimazione.

II. - IL PROBLEMA PRINCIPALE DI BALISTICA INTERNA NEL CASO PARTICOLARE DI RESISTENZA QUALSIASI.

Un altro caso, assai interessante, mette in ulteriore evidenza la varietà di sviluppi di cui è suscettibile la Balistica Interna Razionale attuale (sintetizzata, giova ripeterlo, nel sistema di equazioni [I]), ove si generalizzi il significato della funzione ψ (comunemente identificata con la frazione di spessore combusto y).

Per lo più, in Balistica Interna si usa tener conto delle perdite di energia supponendo la massa del proietto affetta da congruo coefficiente di maggiorazione.

Che tale ipotesi non sia sempre ammissibile (e certo non è ammissibile per cariche assai piccole, e cioè per piccole densità di caricamento) appare evidente, ove si rifletta, che, secondo l'ipotesi stessa, la velocità non potrebbe mai annullarsi per un percorso non nullo del proietto nell'anima. Sarebbe pertanto nulla la carica occorrente per portare il proietto sino alla bocca dell'arma o fino ad altro punto dell'anima con velocità residua zero, nel punto stesso (1).

Per questo, e per altri motivi (non fosse altro di completezza teorica) risulta opportuno ricercare una soluzione del problema principale della Balistica Interna, che tenga conto delle resistenze passive, in modo del tutto generale.

Non ripeto qui le considerazioni che ho fatto in proposito in altra sede.

Mi limiterò a riassumere brevemente le conclusioni per dedurre, poi, qualche ulteriore sviluppo.

Per tener conto, adunque, con la maggiore generalità possibile dei veri e propri lavori passivi si può inserire, nell'equazione del moto, una funzione rappresentante le resistenze passive. Supporremo che l'esistenza di resistenze al moto non modifichi le leggi di combustione della polvere, quali del resto esse siano (purchè sia applicabile il sistema [1]).

Ciò posto, ed ammesso che i gas si espandano secondo una politropica, la pressione unitaria *sul fondello* sarà ancora data, in generale, dalla [2] e cioè:

$$P = \frac{f\omega}{z\Omega} \frac{q_0 + \int_{q_0}^q \rho^\Theta dq}{\rho^{1+\Theta}}$$

ed il lavoro complessivamente fornito dai gas della carica sarà ancora espresso dalla [1 bis] ove si indichi in essa il lavoro passivo L_p ossia:

$$\frac{1}{2} mv^2 + L_p = \frac{f\omega}{\Theta} \left[q - \frac{q_0 + \int_{q_0}^q \rho^\Theta dq}{\rho^\Theta} \right] \quad [1 \text{ ter}]$$

dove m è la massa *effettiva* (non maggiorata) del proietto.

Se poniamo:

$$L_p = z\Omega \int_1^e R d\phi$$

R essendo la pressione unitaria (in generale non costante) occorrente per vincere le resistenze; la velocità sarà data da:

(1) ARGAN G.: « Considerazioni sul calcolo delle velocità iniziali in balistica interna » in *Rivista di Artiglieria e Genio - Supplemento tecnico*, maggio, 1935.

$$v^2 = \frac{2f\omega}{\Theta m} \left[q - \frac{q_0 + \int_{q_0}^q \rho^\Theta dq}{\rho^\Theta} \right] - \frac{2f\omega}{m} \int_1^\rho R d\rho \quad [20]$$

Ove si sia posto: $R = \frac{f\omega}{z\Omega} R$ (R è una funzione numerica) e si sia supposto:

$$P_v = P - R$$

(P_v = pressione unitaria usufruita per imprimere forza viva al proietto).

D'altra parte, si può porre:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\omega}{l_1} \frac{P}{P_i}$$

si ha evidentemente: $P_v dt = \frac{m}{\Omega} dv$ ed in conseguenza:

$$\frac{m}{\Omega} dv + \frac{f\omega}{z\Omega} R dt = \frac{l_1 P_i}{W} dy \quad [21]$$

donde, moltiplicando i membri per v ed integrando:

$$v^2 = \frac{2\Omega l_1 P_i}{\omega m} \int_{y_0}^y v dy - \frac{2f\omega}{m} \int_1^\rho R d\rho \quad [22]$$

dalla [22] e dalla [20] si trae:

$$\frac{\Omega l_1 P_i}{W} \int_{y_0}^y v d\psi = \frac{f\omega}{\Theta} q - \frac{f\omega}{\Theta} \frac{q_0 + \int_{q_0}^q \rho^\Theta dq}{\rho^\Theta} = \Phi;$$

da cui derivando rispetto a y e ponendo

$$v = \frac{\omega f\omega}{\Theta l_1 \Omega P_i} \left| \frac{dq}{dy} - \frac{d\Phi}{dy} \right| \quad [23]$$

Ove si consideri che $dt = \frac{z d\rho}{v}$ dalla [21] con facili passaggi si ottiene:

$$v = \frac{\Omega l_1 P_i}{\omega m} [y - y_0] - \frac{f\omega}{m} \int_1^\rho \frac{R}{v} d\rho \quad [24]$$

Eguagliando tra loro la [23] e la [24] e sostituendo il valore di $\int_1^\rho \frac{R}{v} d\rho$ che se ne ottiene, nella [23] stessa, si ha:

$$v^2 = \frac{2f\omega}{Hm} \frac{H^2}{4\Theta^2} \left| \frac{dq}{dy} - \frac{d\Phi}{dy} \right|^2 = \frac{2f\omega}{Hm} \xi \quad [25]$$

del tutto analoga alla [1], solo che alla funzione φ di questa si sostituisca

$$\xi = \frac{H^2}{4\Theta^2} \left| \frac{dq}{dy} - \frac{d\Phi}{dy} \right|^2$$

Se, poi, si pone:

$$\frac{dq}{dy} - \frac{d\Phi}{dy} = F(y) \text{ ed } F(y) dy = \frac{\Theta}{H} \chi' dq$$

dove χ è un funzione di q si potrà scrivere:

$$dq - \frac{\Theta}{H} \chi' dq = d\Phi$$

donde con facili passaggi:

$$\log_e \rho = \frac{1}{H} \int_{q_0}^q \frac{\chi' dq}{q - \frac{\Theta}{H} \chi} \quad [26]$$

ove si ricordi il significato di

$$\Phi = \frac{q_0 + \int_{q_0}^q \rho^{\Theta} dq}{\rho^{\Theta}}$$

La [26] è del tutto analoga alla [3] sol che alla funzione φ si sostituisca la funzione χ .

Dunque, *quando non si abbiano lavori passivi*, le due funzioni ξ (che entra nella formula [25] della velocità) e χ (che entra nella formula [26] del numero d'espansioni) si identificano entrambe nella φ , funzione in generale della sola frazione q di carica combusta.

Quando, invece, *si abbiano lavori passivi*, le due funzioni ξ e χ sono distinte ed ambedue dipendono oltrechè dalla q anche dai parametri di caricamento e dalla funzione R della resistenza.

Dal confronto tra la [25] e la [26] si deduce che la ξ e la χ sono tra loro legate dalla relazione:

$$\xi = \frac{1}{4} \left| \chi' \frac{dq}{dy} \right|^2$$

Da quanto sopra, deriva:

$$\int_1^2 R d\rho = \frac{1}{4} \chi - \frac{1}{44} \left| \chi' \frac{dq}{dy} \right|^2 \quad [27]$$

che nel caso di resistenza costante lungo l'anima (e quindi di funzione R costante) diventa:

$$\rho = \frac{1}{RH} \chi - \frac{1}{4RH} \left| \chi' \frac{dq}{dy} \right|^2 + 1 \quad [28]$$

Per resistenza costante e polvere a combustione ($y = q$) χ e q risultano legate dalla seguente equazione differenziale, in cui però le variabili non sono separabili:

$$q = -\frac{\Theta}{H} \chi + \frac{\chi - \frac{1}{4} \chi'^2 + RH}{H \left| 1 - \frac{1}{2} \chi'' \right|} \quad [29]$$

Fin qui, in stretto riassunto, i risultati cui ero precedentemente giunto in proposito.

Essi forniscono, in linea teorica, la soluzione del problema principale di Balistica Interna, generalizzato ad una qualsiasi forma della resistenza, ed, almeno per resistenza costante e polveri a combustione costante, consentono anche di pervenire all'equazione differenziale conclusiva, senza che però da essa si possa passare alle quadrature.

La trattazione può però essere estesa ulteriormente in modo accessibile al calcolo pratico (almeno per alcuni casi particolari).

Per resistenza proporzionale alla pressione (e cioè per il caso di maggiorazione di massa) si ha $R = KP$ ($R = \frac{f\omega}{z\Omega} R$) e quindi:

$$\frac{z\Omega K}{f\omega} \int_1^{\infty} P d\rho = \frac{1}{4} \chi - \frac{1}{4H} \left[\chi' \frac{dq}{dy} \right]^2$$

e, per la [25] (ricordando che $ds = z d\epsilon$):

$$\frac{Kmv^2}{2f\omega} = \frac{1}{H} \chi - \frac{m}{2f\omega} v^2$$

da cui:

$$v^2 = \frac{2f\omega}{H(K+1)m} \chi \quad [30]$$

dove, evidentemente, $K+1$ è il coefficiente di maggiorazione di massa. Nella [30] (come nelle precedenti formule di questo paragrafo) il modulo di caricamento H deve intendersi calcolato per massa non maggiorata e quindi legato dalla seguente relazione al modulo di caricamento usuale H_μ relativo a carica maggiorata:

$$\frac{H_\mu}{K+1} = H$$

Tenendo conto di ciò ed eguagliando con la [1] (relativa appunto a massa maggiorata $\mu = (K+1)m$)

$$v^2 = \frac{2f\omega}{H_\mu m} \chi = \frac{2f\omega}{H_\mu \mu} \varphi$$

e quindi:

$$\chi = \frac{1}{K+1} \varphi = n \varphi \quad [31]$$

dove n è l'inverso del coefficiente di maggiorazione di massa.

Allora si avrà:

$$\frac{1}{4} \left[\chi' \frac{dq}{dy} \right]^2 = n^2 \varphi$$

poichè per la [1]: $[y - y_0]^2 = \varphi$

epertanto, in definitiva: *per resistenza proporzionale alla pressione:*

$$\int_1^{\rho} R d\rho = \frac{n}{H} \varphi - \frac{n^2}{H} \varphi^2 \quad [32]$$

$$\text{con } n = \frac{1}{K+1} = \frac{1}{\frac{R}{P} + 1} = \frac{P}{R+P} = \text{cost}$$

Torniamo, ora, al caso di resistenza costante e polvere a combustione costante ($\gamma = q$).

Anzitutto conviene osservare, che dal sistema [I] si ha:

$$\frac{dq}{d\rho} = \frac{H}{\rho} \frac{q - \frac{\theta}{H} \varphi}{\varphi'} \quad \text{da cui:} \quad \frac{d\varphi}{d\rho} = H \frac{q - \frac{\theta}{H} \varphi}{\rho}$$

Data l'analogia tra la [3] e la [26] e cioè l'identità di comportamento analitico della φ e della χ rispetto al numero di espansioni φ , si avrà, analogamente, nel caso dell'esistenza di resistenze qualsiasi al moto:

$$\frac{\rho}{H} \frac{d\chi}{d\rho} = q - \frac{\theta}{H} \chi \quad [33]$$

donde, confrontando con la [29]

$$\frac{\rho}{H} \frac{d\chi}{d\rho} = \frac{\chi - \frac{1}{4} \chi'^2 + RH}{H \left[1 - \frac{1}{2} \chi'' \right]}$$

Ma, per la [28] e tenuto conto che nel caso di polveri a combustione costante: $\frac{dq}{d\varphi} = 1$

$$RH\rho = \chi - \frac{1}{4} \chi'^2 + RH$$

e, in conseguenza:

$$\frac{1}{H} \frac{d\chi}{d\rho} = \frac{R}{1 - \frac{1}{2} \chi''} \quad [34]$$

D'altra parte, dal sistema [I] si ha, altresì, come è facile riconoscere:

$$\frac{q - \frac{\theta}{H} \varphi}{\rho} = \frac{q_0 + \int q_0 \rho^{\theta} d\rho}{\rho^{1+\theta}} = \frac{z\Omega}{f_w} P$$

e per l'analogia surricordata:

$$\frac{z\Omega}{f_w} \frac{P}{R} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \chi''} \quad \text{da cui:} \quad \frac{R}{P} = 1 - \frac{1}{2} \chi''$$

perciò:

$$\chi'' = 4 - \frac{2}{n} \quad [35]$$

dove n deve ora supporre, in generale, funzione di q , dei parametri di carimento e della resistenza R .

Dalla [35], integrando:

$$\chi' = 4 [q - q_0] - 2 \int_{q_0}^q \frac{1}{n} dq$$

$$\chi = 2 [q - q_0]^2 - 2 \int_{q_0}^q \left(\int_{q_0}^q \frac{1}{n} dq \right) dq$$

per cui la [29] diventa:

$$q - \frac{2\theta}{H} \left[(q - q_0)^2 - \int \left(\int \frac{1}{n} dq \right) dq \right] =$$

$$= \frac{2 (q - q_0)^2 - 2 \int \left(\int \frac{1}{n} dq \right) dq - \left[2 (q - q_0) - \int \frac{1}{n} dq \right]^2 + RH}{H \left[\frac{1}{n} - 1 \right]}, \quad [29 \text{ bis}]$$

Se poniamo:

$$\chi' = 4 [q - q_0] - 2 \int_{q_0}^q \frac{1}{n} dq = \sigma \varphi' \quad (\text{ricordando che } (q - q_0)^2 = \varphi)$$

si ha:

$$\frac{1}{4} \chi'^2 = \sigma^2 \varphi$$

essendo σ funzione di q e di n .

In conseguenza si avrà:

$$\chi = 2 [q - q_0]^2 - 2 \int_0^\varphi \left(1 - \frac{1}{2} \sigma \right) d\varphi$$

e ponendo: $\chi = \lambda \varphi$ risulterà: $\lambda \varphi = \int_0^\varphi \sigma d\varphi$

Cosicchè, in definitiva, *per polveri a combustione costante e resistenza costante*, l'energia spesa in lavori passivi potrà esprimersi con la relazione:

$$\int_1^p R d\rho = \frac{\lambda}{H} \varphi - \frac{\sigma^2}{H} \varphi \quad [32 \text{ bis}]$$

formalmente analoga alla [32]. Qui, però, come immediatamente si rileva, λ e σ non sono costanti, ma sono invece funzioni della frazione di carica combusta q e del parametro n e cioè dell'inverso del valore istantaneo che, per il ρ considerato, verrebbe ad assumere (a pari funzione resistente R e pressione) il coefficiente di maggiorazione di massa. E' facile verificare che per $R = 0$ ($n = 1$) σ e λ assumono valore 1. Ciò posto, appare lecito, con spontanea generalizzazione, considerare valida la posizione [32 bis] *anche per polveri qualsiasi*, fermo restando, il requisito della *resistenza costante*. Naturalmente, col variare della specie di polvere, la σ e la λ rappresenteranno differenti funzioni.

Nel caso di polveri a combustione costante, la [32 bis] e precedenti consentono di risolvere il problema principale di Balistica Interna con metodo indubbiamente laborioso, ma che tuttavia conviene esporre, perchè dà idea delle possibilità pratiche della Balistica Interna in questo campo di ricerche.

Ricordando che:

$$\frac{1}{n} = \frac{R}{P} + 1$$

risulta:

$$\sigma \varphi' = 2 (q - q_0) - 2 R \int_{q_0}^q \frac{dq}{P}$$

Si consideri un intervallo (q_0, q_n) suddiviso in n intervalli minori (q_0, q_a) , (q_a, q_b) , $(q_b, q_c) \dots (q_{n-1}, q_n)$.

Sia q_0 non nullo.

Allora $\sigma \varphi'$ (relativo all'intero intervallo q_0, q_n) sarà dato da:

$$\begin{aligned} \sigma \varphi' = 2 [q_n - q_0] - 2 R \int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{P} = 2 (q_n - q_0) - 2 R \int_{q_0}^{q_a} \frac{dq}{P} - 2 R \int_{q_a}^{q_b} \frac{dq}{P} - \\ - 2 R \int_{q_b}^{q_c} \frac{dq}{P} + \dots + - 2 R \int_{q_{n-1}}^{q_n} \frac{dq}{P} \end{aligned} \quad [36]$$

Per quanto si riferisce ad $\int_{q_{x-1}}^{q_x} \frac{dq}{P}$ relativo ad un intervallo qualsiasi si potrà in generale porre: (in base al teorema dell'integrazione per parti ed al teorema del valor medio):

$$\begin{aligned} \int_{q_{x-1}}^{q_x} \frac{dq}{P} = \left[\frac{1}{P_x} q_x - \frac{1}{P_{x-1}} q_{x-1} \right] - q_m \int_{\frac{1}{P_{x-1}}}^{\frac{1}{P_x}} d\left(\frac{1}{P}\right) = \\ = \left[\frac{1}{P_x} q_x - \frac{1}{P_{x-1}} q_{x-1} \right] - q_m \left[\frac{1}{P_x} - \frac{1}{P_{x-1}} \right] \end{aligned} \quad [37]$$

essendo q_m un valor medio di q nell'intervallo.

Per $\lambda \varphi$ si avrà, analogamente:

$$\lambda = \lambda \varphi = \int_{q_0}^{q_n} \sigma d\varphi = \int_{q_0}^{q_a} \sigma d\varphi + \int_{q_a}^{q_b} \sigma d\varphi + \int_{q_b}^{q_c} \sigma d\varphi + \dots + \int_{q_{n-1}}^{q_n} \sigma d\varphi \quad [38]$$

e per un intervallo generico:

$$\int_{q_{x-1}}^{q_x} \sigma d\varphi = \left[\sigma_x \varphi_x - \sigma_{x-1} \varphi_{x-1} \right] - \varphi_m \left[\sigma_x - \sigma_{x-1} \right] \quad [39]$$

Ciò, posto, si vogliano calcolare $\rho_n P_n v_n$ relativi alla fusione di carica combusta q_n . Sia R costante, assegnata, e q_0 non nullo. Polvere a combustione costante.

Suddividiamo l'intervallo (q_0, q_n) in n piccoli intervalli.

1° - *Calcolo approssimato di σ_a e P_a corrispondenti all'estremo del primo intervallo (q_0, q_a) .*

a) Calcolo di σ_a e P_a in prima approssimazione.

Si ha:

$$\sigma_a = 1 - R \left\{ \left[\frac{1}{P_a} q_a - \frac{1}{P_0} q_0 \right] - \frac{q_a + q_0}{2} \left[\frac{1}{P_a} - \frac{1}{P_0} \right] \right\} \frac{1}{q_a - q_0} \quad [40]$$

perchè, nell'ipotesi fatta, $\frac{dq}{d\varphi} = \frac{1}{2(q_a - q_0)}$

Si calcola P_0 con le solite note formule. Per P_a si sceglie un valore approssimato (per es.: il valore che, a parità di q_a , si otterrebbe per resistenza nulla o con coefficiente di maggiorazione di massa $\frac{1}{n} = \frac{R}{P_0} + 1$ essendo R la resistenza assegnata).

Si calcola, con tali dati, σ_a .

Per q_0 non nullo $\sigma_0 = 0$.

Pertanto, si avrà:

$$\lambda_a = (\lambda\varphi)_a = \frac{\varphi_a}{2} [\sigma_a + 1] \quad (\text{poichè } \varphi_0 = 0).$$

Ottenuto così un primo valore approssimato per σ_a e per $(\lambda\varphi)_a$ dalla [32 bis] si ricaverà un primo valore approssimato di σ_a .

In conseguenza, la formula

$$P = \frac{f_w}{zQ} \frac{q - \frac{\theta}{H} \lambda\varphi}{\rho}$$

fornirà un corrispondente primo valore approssimato di P_a .

b) Calcolo di σ_a e P_a in ulteriore approssimazione.

Si ponga nella [40] il valore di P_a ottenuto in prima approssimazione; si ottiene un secondo valore, più approssimato, di σ_a e, sulla base di questo, si ricava un secondo valore di $(\lambda\varphi)_a$ e quindi di σ_a e di P_a .

Occorrendo si potrà ripetere ancora il calcolo, onde raggiungere una maggiore approssimazione.

2° - *Calcolo di φ e P per gli estremi degli intervalli successivi.*

Si consideri l'intervallo (q_a, q_b) immediatamente successivo al primo.

Si avrà:

$$\sigma_b = 1 - \frac{R}{q_b - q_0} \left[\frac{1}{P_b} q_b - \frac{1}{P_0} q_0 + R \right] \frac{q_a + q_0}{2(q_b - q_0)} \left[\frac{1}{P_a} - \frac{1}{P_0} \right] + R \frac{q_b + q_a}{2(q_b - q_0)} \left[\frac{1}{P_b} - \frac{1}{P_a} \right]$$

Si sceglie P_b secondo i criteri di cui al precedente calcolo di prima ap-

prossimazione, oppure apportando al valore che risulterebbe per resistenza nulla, una opportuna correzione in base al P_a di cui in *b*).

Mediante le formule [36], [37], [38] e [39] e con gli elementi suddetti, si calcola un primo valore approssimato di σ_b e quindi di $(\lambda \varphi)_b$.

Si calcola, in conseguenza, un primo valore approssimato di ρ_b e di P_b .

Con tale valore di P_b si ripete il calcolo in seconda approssimazione, e così via.

Analogamente dicasi per quanto riguarda il calcolo approssimato di ρ e P , per gli estremi dei rimanenti intervalli, e da ultimo di ρ_n e P_n (1).

3° - Calcolo definitivo di ρ_n e P_n .

In base ai calcoli precedenti si può tracciare un diagramma (P, q) esteso a tutto l'intervallo complessivo (q_0, q_n) .

Si può inoltre, tracciare un diagramma (σ, φ) esteso a tutto il corrispondente intervallo (σ, φ_n) . Si possono calcolare graficamente $\int_{q_0}^q \frac{dq}{P}$ e $\int_{\sigma}^{\varphi} \sigma d\varphi$ ed ottenere corrispondenti valori, ulteriormente approssimati, di σ_n e di $(\lambda \varphi)_n$.

Ciò servirà, anche, ad offrire una possibilità di controllo dei calcoli precedenti e, all'occorrenza, consentirà di ripeterli per i singoli intervalli sulla base dei relativi integrali $\int \frac{dq}{P}$, rettificando in tal modo i risultati in precedenza raggiunti.

4° - Calcolo di v_n .

Ottenuto un diagramma definitivo di P in funzione di q si potrà, per integrazione grafica, ricavare v_n , ed all'occorrenza ottenere le velocità relative alle q intermedie (ricordando che la pressione P_v che imprime velocità al proietto è data da $P_v = P - R$).

Oppure, poichè si dispone di tutti i dati occorrenti, calcolare le v , mediante la [20].

E' da osservare, infine, che, per quanto si è detto la [1] (formula di Sébert, Hugoniot) assume la forma:

$$v^2 = \frac{2f\omega}{Hm} \sigma^2 \varphi$$

e cioè:

$$v^2 = \frac{2f\omega}{Hm} [\Psi - \Psi_0]^2 = \frac{2f\omega}{Hm} [\sigma y - \sigma y_0]^2$$

essendo perciò $\psi = \sigma y = \sigma q$ (polvere a combustione costante).

(1) Per il punto di pressione massima, che occorrerà far coincidere con la maggior possibile approssimazione, con l'estremo di un intervallo, sarà da tener presente che:

$$\sigma \varphi' = \frac{H}{1 + 0} \text{ e quindi: } \sigma^2 y = \frac{H^2}{4(1 + 0)^2}$$

Ovviamente γ è la frazione di spessore combusto teorica legata alla frazione di carica combusta q dalla funzione di forma usuale (basata essenzialmente sulle caratteristiche geometriche del grano) e σ una funzione della stessa frazione di carica combusta, della resistenza R e dei parametri di caricamento.

Pertanto, la ψ verrebbe ad assumere, in questo caso, il significato di frazione di carica combusta effettiva. Conseguentemente la χ in confronto della φ rappresenterebbe (nelle formule della pressione e del numero d'espansioni) la funzione di forma effettiva o, meglio, la funzione di forma di una polvere ipotetica, atta a fornire, con resistenze nulle, comportamento balistico uguale a quello, che nelle condizioni di resistenza qui ipotizzate, viene ad essere fornito dalla polvere effettivamente impiegata.

Direttore responsabile: Colonnello SIRO BERNABÒ

Proprietà letteraria e artistica riservata

Tipografia Regionale - Roma - Piazza Manfredo Fanti, 42

